

# ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÚR ANDRÁS, GERENCSÉR LÁSZLÓ, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

BOZÓKI SÁNDOR

FELELŐS SZERKESZTŐ-HELYETTES

CSATÓ LÁSZLÓ

TÖRDELŐSZERKESZTŐ

MOCZÁR KÁROLY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Miklós, Baran Sándor, Csáji Balázs Csanád, Csendes Tibor, Csirik János, Fazekas István, Forgó Ferenc, Frank András, Fridli Sándor, Friedl Katalin, Friedler Ferenc, Galántai Aurél, Garay Barna, Gazdag-Tóth Boglárka, Gyimóthy Tibor, Hajdu András, Hartung Ferenc, Hatvani László, Heppes Aladár, Horváth Zoltán, Illés Tibor, Járai Antal, Jelasity Márk, Katona Gyula, Király Tamás, Kis Tamás, Kovács Gergely, Krisztin Tibor, Lovász László, Maksa Gyula, Maros István, Michaletzky György, Miklós István, Molnár-Sáska Gábor, Pap Gyula, Pituk Mihály, Rásonyi Miklós, Recski András, Rónyai Lajos, Röst Gergely, Simon Péter, Szabó Péter Gábor, Szeidl László, Szilágyi Brigitta, Tasnádi Attila, Temesi József, Tusnady Gábor, Vizi Zsolt, Vizvári Béla

37. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

A folyóirat e-mail címe: [aml@renyi.hu](mailto:aml@renyi.hu)

A folyóirat honlapja: <http://aml.math.bme.hu>

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

## ELŐSZÓ

Jelen szám a 2019. május 20-22. között Szegeden megrendezett XXXIII. Magyar Operációkutatási Konferenciához<sup>1</sup> kapcsolódó különszám. A konferenciáról részletesen beszámolt az Érintő 2019. júniusi száma<sup>2</sup>.

A konferencián elhangzott 95 előadás közül 16 lektorált cikket közlünk.

A különszám elején Pap Gyulára és Szigeti Ferencre emlékezünk. Ezt követően számos rangos elismerésről számolunk be: Szántai Tamás Prékopa András-díjáról, Röst Gergely QP Akadémiai Kiválóság díjáról, Temesi József (2019) és Deák István (2020) Egerváry Jenő Emlékplakettjéről, Csomós Petra Gyires Béla-díjáról, valamint Berend Gábor, Fekete Imre, Molontay Roland és Rigó Petra Renáta Farkas Gyula-emlékdíjáról.

Berde Éva és Kuncz Izabella azt vizsgálja, hogy egy telekocsi utastárs-közvetítő platformon az idősebb sofőröknek érdemes-e önkéntesen megadni az életkorukat.

Bertók Botond a kombinatorikus algoritmusokban alkalmazott halmazműveletek implementációs kérdéseit tekinti át, valamint egy hasítótábla-bitvektor hibrid adatszerkezetet javasol, amely a tapasztalatok alapján lényegesen jobb futási idővel rendelkezik, mint az ismert függvénykönyvtári adatszerkezetek.

Bessenyei István azt vizsgálja, hogy egy fejlődő gazdaság hogyan kerülhet ki a közepes fejlettség csapdájából, s állhat egy stabil növekedési pályára.

Csató László vegyes sportbajnokságok tervezésére ad új csoportszervezési módszert és ennek lehetséges kimenetelét a férfi kézilabda Bajnokok igája valós adataival hasonlítja össze.

Csóka Péter és Kondor Gábor a pénzügyi hálózatokban alkalmazott csődszabályok szakirodalmát és legfontosabb eredményeit tekinti át.

Darvay Zsolt, Rigó Petra Renáta és Szénási Eszter egy új keresési irányra épülő belsőpontos algoritmust konstruál meg lineáris optimalizálási feladatok megoldására.

Gera Imre és London András gráf alapú dimenzióredukciós heurisztikákat vizsgál részvénytapi hozamok idősorából képzett korrelációs mátrixok becslésére.

Gerencsér Balázs és Gerencsér László éles konvergenciatételeket bizonyít az általánosított relatív konszenzus problémát megoldó Projektív-Konszenzus algoritmusokra.

---

<sup>1</sup><http://www.mot.org.hu/mok2019>

<sup>2</sup><https://ematlap.hu/gazda-g-sag-2019-6/876-szegeden-a-xxxiii-magyar-operaciokutatasi-konferencia>

Győrfy Lajos olyan közismert játékokat vizsgál, mint a tic-tac-toe, vagy az (ötös) amőba és ezeknek, az általánosabban pozíciós, illetve hipergráf játékoknak nevezett problémáknak keresi a nyerő stratégiáit.

Homolya Viktor és Vinkó Tamás a gráfokon értelmezett befolyás terjedés kombinatorikus optimalizálási feladatára javasol egy hegymászó jellegű algoritmust.

Péterfalvi Ferenc és Recski András egy villamos hálózatokban felmerülő problémára ad a korábbiaknál általánosabb, matroid elmélet alapú megoldást. Azt is megmutatják, hogy az általánosított probléma milyen statikai kérdést vet fel.

Pluhár András Kronecker-Capelli tétel kombinatorikai következményeit vizsgálja, és többek között új bizonyítást ad Kőnig és Harary egyes eredményeire, valamint a nyaklánc probléma megoldására.

Szabó Balázs és Sebestyén Tamás igazolja, hogy a termelőket és fogyasztókat összekapcsoló, nem teljes, de közgazdasági szempontból releváns hálózati szerkezet esetén egyértelműen létezik egyensúlyi árvektor.

Szabó Sándor és Sztojkovics Dóra az élsúlyozott klikk problémára adott új vegyes-egészértékű programozáson alapuló formulációkat, és vetette össze azokat korábbi eredményekkel a szakirodalomból.

Tamás Ambrus és Csáji Balázs Csanád újfajta sztochasztikus garanciákat definiál bináris osztályozási feladatokhoz, és megmutatja, hogy ezek hogyan alkalmazhatóak a tanuló algoritmusok alkalmazásában.

Temesi József a döntéselméletben gyakran alkalmazott páros összehasonlítások módszerének alkalmazásának feltételeire és a döntéshozónak a megoldási folyamatba való bevonásának szükségességére mutat rá.

Köszönjük a szerzők és a bírálók munkáját, amelynek köszönhetően ezt a különszámot össze tudtuk állítani.

Kis Tamás

Bozóki Sándor

Gazdag-Tóth Boglárka

Kóczy Á. László

vendégszerkesztők

DR. PAP GYULA EMLÉKÉRE  
(1954-2019)



*Dr. Kántor Sándorné megemlékezését, amely az Érintő 2019/9. számában jelent meg, és a [www.ematlap.hu/index.php/hirek-ujdonsagok-2019-9/923-dr-pap-gyula-1954-2019](http://www.ematlap.hu/index.php/hirek-ujdonsagok-2019-9/923-dr-pap-gyula-1954-2019) címen érhető el, a szerző és az Érintő szerkesztőségének szíves engedélyével közöljük.*

Hirtelen és váratlanul távozott el az élők sorából 2019. október 4-én Dr. Pap Gyula egyetemi tanár.

Pap Gyula élete és tudományos munkássága két városhoz, Debrecenhez (1954-2009) és Szegedhez (2009-2019) kötődött.

### Debreceni évek

Debrecenben született, az általános iskolát zenetagozaton, a középiskolát a debreceni Fazekas Mihály Gimnázium speciális matematika tagozatán végezte. 1972-ben érettségizett. Tanulmányait a Kossuth Lajos Tudományegyetemen (KLTE) folytatta matematikus szakon. Érdeklődési köre a valószínűségszámításhoz kötődött.

Gyires Béla professzor irányítása alatt írta meg diplomamunkáját *Az általánosított binomiális eloszlás határeloszlása* címmel. Matematikusi diplomáját 1977-ben kapta meg. Ezután a KLTE-n járta végig a ranglistát. Az Alkalmazott Matematika és Valószínűség Tanszékén: tanársegéd (1977-1986), adjunktus (1986-1989), docens (1989-1999) majd egyetemi tanár (1999-2009) lett.



Az egyetemi alkalmazása során, az oktatáson és a kutatáson felül számos egyetemi megbízása volt. Az KLTE Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszékének vezetője (1990-1991), a Matematika és Informatikai Intézetben elnökhelyettes (1992-1993), igazgató (1999-2001), tanszékvezető a Debreceni Egyetem (DE) Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszékén (2003-2009), igazgatóhelyettes a DE Informatikai Intézetében (2003-2004).

2004-ben alakult meg az Informatikai Kar. A megalakuláskor Dr. Pap Gyula az Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszék tanszékvezető egyetemi tanára és 2004-2009-ig a Kar Tudományos és Pályázati dékánhelyettese lett.

### Tudományos pályafutása (1977-2009)

1981 szeptemberétől levelező aspiráns. A Vilniuszi Egyetemen (Litvánia) Vyantas Paulauskas professzor irányítása mellett készítette el kandidátusi disszertációját, melynek címe: *Véletlen stabilis Banach-térbeli vektorok normája eloszlásának tulajdonságairól*. A kandidátusi fokozatot 1985-ben kapta meg.

1996-ban habilitált a KLTE-n. A disszertáció címe: *Néhány határeloszlás-tétel és kapcsolódó kérdések*. 1999-ben szerezte meg az MTA doktora fokozatot. Doktori disszertációjának címe: *A centrális határeloszlás-tétel problémaköre a Lie-csoportokon*.

Elnyerte az Alexander von Humboldt Alapítvány kétéves kutatói ösztöndíját, amelyet két részletben vett igénybe (1988-1990 és 1995-1996). Kutatómunkáját a Tübingeni Egyetem Matematikai Intézetében (Németország) végezte Herbert Heyer professzor mellett. Témái: *Valószínűségi mértékek lokálisan kompakt topologikus csoportokon* és *Centrális határeloszlás-tételek lokálisan kompakt topologikus csoportokon*.

1997-2001 között Széchenyi-ösztöndíjas. 2002-2003-ban megkapta a Fulbright Alapítvány kutatói ösztöndíját. Philip Feinsilver professzor mellett (Southern Illinois University, Carbondale, Department of Mathematics) végezte kutatómunkáját a *Valószínűségelmélet Lie-csoportokon* témában.

Először a Tempus Joint Project keretében az idősor-analízis témakörben végzett közös kutatómunkát Martien van Zuijlen professzorral (1993, Nijmegeni Egyetem, Hollandia), ezt 2003-ban, 2004-ben és 2005-ben tovább folytatta az új kutatási témáiban is. Ekkor kezdett foglalkozni a *gazdasági és informatikai rendszerek matematikai modellezésével, idősor-analízissel és pénzügyi matematikával, elágazó folyamatok statisztikai kérdéseivel, egész értékű autoregressziós folyamatokkal*.

A Debreceni Egyetemen töltött évei alatt *90 tudományos dolgozata* jelent meg.

Kiemelkedő szakmai munkásságáért több kitüntetésben részesült:

*Farkas Gyula-émlékdíj* a matematika alkalmazása területén elért kimagasló eredményeiért (Bolyai János Matematikai Társulat, 1985), *Miniszeri Dicséret* (1987), *Alexits György-díj* az analízis és annak alkalmazása területén elért tudományos eredményeiért (MTA, 1995), *DE Közgazdasági Karának Díszérme* (DE, 2007).

Nagy hangsúlyt fektetett a fiatal tehetségekkel való foglalkozásra, tanítványai eredményesen szerepeltek a TDK-n, illetve a doktori iskolákban fokozatot szereztek.

### Szegedi évek (2009-2019)

Csörgő Sándor utódaként került Szegedre 2009-ben a Bolyai Intézet Sztochasztika Tanszékének vezetői székébe. 8 évig volt a Sztochasztika Tanszék tanszékvezetője és 3 évig a Bolyai Intézet igazgatója.

Gyorsan beilleszkedett az új munkakörbe. Jó kapcsolatot alakított ki munkatársaival és tanítványaival. Továbbra is aktívan és sokat dolgozott mind a kutatás, mind az oktatás területén. Nagy sikert arattak kivetítéssel színesített előadásai, illetve oktatási segédanyagai, jegyzetei. Ebben a munkában kollégájával, Barczy Mátyással közösen is dolgoztak (valószínűségelmélet, sztochasztikus folyamatok, valószínűségszámítás példatár).

Szegedi éve alatt 50 tudományos dolgozata jelent meg, illetve még 5 dolgozata áll megjelenés alatt.

Nagy tervei voltak. Könyvet akart írni az elágazó folyamatok statisztikai paraméterbecsléseiről. Erre lehetőséget adott volna az, hogy 2019 szeptemberétől a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet vendégkutatója lett.

A szegedi évek alatt nagyon jelentőssé vált iskolateremtő tevékenysége. Pap Gyula egy új virágzó matematikai iskolát, egy sztochasztikai műhelyt hozott létre. Folyamatosan élen járt a tudományos utánpótlás nevelésében. Csörgő Sándor árván maradt hallgatóit is hozzásegítette a fokozat szerzéséhez.

Iskolateremtő tevékenységéért a *Bolyai János Matematikai Társulat* 2014-ben *Szele Tibor-émlékéremmel* tüntette ki. A laudáció kiemelte azt, hogy „*kutatási területe a valószínűségelmélet/sztochasztika. A határeloszlás-tételek, a sztochasztikus folyamatok és a matematikai statisztika nemzetközileg elismert kutatója, aki élen jár a tudományos utánpótlás nevelésében. Professzori szobájának ajtaja nyitva áll, és előtte elhaladva nagyon gyakran látható, hogy tanítványaival, fiatalabb kollégáival konzultál, velük közösen dolgozik.*”

Már a debreceni évek alatt is témavezetője volt díjnyertes tudományos diákköri dolgozatoknak, ezt a munkát folytatta Szegeden. Debrecenben és Szegeden összesen 14 doktorandusza szerzett fokozatot. Velük több közös cikke jelent meg.

Több doktori iskola (Debreceni Egyetem Matematikai és Számítástudományi Doktori Iskola, a Szegedi Tudományegyetem Matematikai és Számítástudományi Doktori Iskola, a Debreceni Egyetem Informatikai Tudományok Doktori Iskola, a Szegedi Tudományegyetem Informatikai Tudományok Doktori Iskola, Szegedi Tudományegyetem Közgazdaságtani Doktori Iskola) munkájában vett részt.

A határeloszlás-tételek, a sztochasztikus folyamatok és a matematikai statisztika területén elért, nemzetközileg elismert kutatásaiért, jelentős utánpótlás-nevelő és iskolateremtő munkásságának elismeréseként 2015-ben az MTA Elnökségétől megkapta az *Akadémiai Díjat*.

A fenti kitüntetések mellett még Szegeden a Szegedi Tehetséggondozó Tanács és az SZTE Tehetségpont *Pro Talento díjban* (2013) és a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kara *Pro Facultate Díjban* (2018) részesítette.

Aktívan részt vett a tudományos életben. Négy tudományos szakmai folyóirat szerkesztő bizottságának volt a tagja: a *Publicationes Mathematicae* (Debrecen) nemzetközi folyóiratnak 1999-től, a *Teaching Mathematics and Computer Science* (Debrecen) nemzetközi folyóiratnak 2003-tól, az *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged) nemzetközi folyóiratnak 2009-től és az *Alkalmazott Matematikai Lapoknak*.

Tagja volt a *Bolyai János Matematikai Társulatnak*, a *Neumann János Számítógép-tudományi Társaságnak*, illetve a *Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability* nemzetközi szervezetnek. A Bolyai János Matematikai Társulatban a *Tudományos Szakosztálynak* 2000 és 2009 között alelnöke, 2009-2012 között *elnöke* volt.

Több tudományos konferencia szervezésében vett részt (Hajdúszoboszló (1997), Eger (2001), Budapest (2004), Szováta (2006). Tagja volt a XXVI. European Meeting of Statisticians konferencia Tudományos Szervező Bizottságának (2009), szervezője volt a Szegedi Sztochasztikus Napoknak (2013) és a Csörgő Sándor Emlékkonferenciának (2018).

Barátságos, közvetlen egyéniség volt. Szerette a zenét, nagyapaként a családban ismét elővették a hangszereket, a furulyát. Szegeden tagja volt az intézeti énekkarnak és az intézeti teniszválogatottnak. Debreceni barátaival minden télen síelni ment. Szívesen vett részt intézeti rendezvényeken mindkét munkahelyén.

Felesége, Hizsnyik Mária, évfolyamtársa volt. 42 évet töltöttek el együtt boldog házasságban. Két gyermeket neveltek fel, Gyuszkót és Julikát. Mindketten matematikusként végeztek és PhD fokozatot szereztek. Az ifj. Pap Gyula diákként kétszer nyert aranyérmet a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián (IMO, 1996, 1997), Ifjúsági Prima-díjas (2009), családos, 3 gyermek édesapja.

*Megjegyzés*

Dr. Pap Gyuláról a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének honlapján *Barczy Mátvás*<sup>1</sup> és *Kevei Péter*<sup>2</sup> tollából jelent meg nekrológ. Debrecenben a Pedagógusok Arcképcsarnoka 2020. évi kötetébe<sup>3</sup> készül egy hosszabb és személyesebb jellegű megemlékezés róla.

*Dr. Kántor Sándorné*

Dr. Kántor Sándorné Dr. Varga Tünde, ma a Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet Geometria Tanszékének nyugdíjas oktatója a Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium speciális matematika tagozatán tanította és érettségiztette Pap Gyulát 1972-ben. Később, amikor már mindketten az Egyetemen tanítottak, nemcsak jó kollegák, de barátok is lettek.

*A szerk. (Érintő)*

---

<sup>1</sup>[http://www.math.u-szeged.hu/mathweb/attachments/article/665/BarczyMatyas\\_PapGyula.pdf](http://www.math.u-szeged.hu/mathweb/attachments/article/665/BarczyMatyas_PapGyula.pdf)

<sup>2</sup><http://www.math.u-szeged.hu/mathweb/attachments/article/665/KeveiPeterPapGyula.pdf>

<sup>3</sup>[http://www.kspe.hu/data/pa/PA-2020\\_1.pdf#page=231](http://www.kspe.hu/data/pa/PA-2020_1.pdf#page=231)

SZIGETI FERENC EMLÉKÉRE  
(1945-2019)



Türelemmel és derűvel viselt, hosszan tartó súlyos betegség után 2019. július 15-én csendesen elhunyt Szigeti Ferenc, a kiemelkedő tehetségű matematikus, a modern analízis és a matematikai rendszerelmélet kiválóan képzett tudósa és legendás hírű tanára.

Az ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék jogelődjének egykori docense, 1985-től kisebb megszakításokkal nyugállományba vonulásáig a University of Los Andes, Mérida, Venezuela vendégtanára, majd professzora, a SZTAKI Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólaboratóriumának külső munkatársa, 1945. március 4-én született Öcsödön falusi kereskedő családba. Gimnáziumi tanulmányait Kunszentmártonban végezte. Kiemelkedő matematikai tehetsége már ebben az időben megnyilvánult: 1965-ben az Arany Dániel Matematikaversenyen korosztályában I. helyezést ért el.

Egyetemi tanulmányait az ELTE TTK matematika szakán folytatta, ahol már hallgatóként lehetőséget kapott arra, hogy az egyetemi oktatómunkában gyakorlatvezetőként részt vegyen. Az egyetem befejezése után az ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék jogelődjén kapott állást. Játékos könnyedséggel sajátította el és tanította az alkalmazott analízis technikailag nehéz területeit, a parciális differenciálegyenletek modern elméletét, a Francis Clarke, ill. Daniel Liberzon közelmúltban megjelent könyveiben reneszánszát élő variációs számítást, vagy a klasszikus irányításelmélet Pontryagin-féle megalapozását.

Egy volt hallgatója, Simon L. Péter, az ELTE TTK professzora, a Matematikai Intézet igazgatója, az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék vezetője szavait idézve:

„Lenyűgöző volt, ahogy különböző területeket összekapcsolt az óráin. A megszokott tananyagon túl a legmodernebb alkalmazásokra is felhívta a figyelmet, illetve a friss kutatási irányokat is bemutatta, és remekül exponálta a funkcionál-analízis leegyszerűsítő szerepét az anyag korszerű felépítésében.”

A tanítást első számú hivatásának tekintette, és a kevésbé tekintélyes szakok hallgatóit is igényesen oktatta a modern eszközök ismeretére és önmaguk meghaladására. Ez a habitus határozta meg a matematika alkalmazásai iránti érdeklődését is.

Pályájának döntő mozzanata volt az olasz matematikai kultúrával való találkozás, az Olasz Kutatói Tanács (CNR) egyéves ösztöndíjával Nápolyban eltöltött időszak, Giuseppe Tallini professzor mellett, és a modern differenciálgeometriával való megismerkedése.

Tanítványai közül kiemelendő Michaletzky György, az ELTE TTK professzora, a TTK korábbi dékánja, több mint két évtizeden át a Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék vezetője, a SZTAKI egykori meghatározó külső matematikai szakértője, akinek egyéni szakirányú képzésében, majd az irányításelméletet és a modern differenciálgeometriát ötvöző szakdolgozatában is témavezetője volt.

Tom Kailath „Lineáris rendszerek elmélete” című könyvének 1980 évi megjelenése és annak tanulmányozása után érdeklődése elmozdult az irányításelmélet mérnöki vonulata felé. Ez idő tájt került kapcsolatba Bokor Józseffel is, a SZTAKI tudományos igazgatójával, az MTA korábbi alelnökével is. Ebből a szakmai kapcsolatból több évtizedes barátság és termékeny kutatási együttműködés született, amely kiterjedt a SZTAKI Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólaboratóriumának más munkatársaira is.

A részben Edelmayer Andrással, részben pedig Molnár Sándorral kibővített team által vizsgált témák többek között a Lie-algebrák irányításelméleti alkalmazásait, Rudolf Kalman alapvető tételeinek időben változó dinamikájú rendszerekre történő kiterjesztését, hibadetektálósűrűk tervezését, ill. a control-affin dinamikus rendszerek vizsgálatát ölelték fel. E közös munkákból számos nagy hatású dolgozat született. Említésre méltó, hogy később mind Edelmayer András, mind pedig Molnár Sándor MTA doktori címet szerzett.

Szigeti Ferenc szakmai pályájának különös árnyalata az a tény, hogy ő maga, egy 1984-es sikertelen, „Folytonos tenzormezők differenciálható approximációja” címmel beadott akadémiai doktori pályázata után soha többé nem pályázott erre a címre. Talán sohasem fogjuk megtudni, hogy miért. Kirobbanó tehetsége, önzetlensége és fáradhatatlan munkálkodása fátylat borított az ő belső világának érzékeny területeire.

A szellemi élet szabadságát számtalan módon korlátozó hazai társadalmi környezetünk se volt éppen eszményi a matematika, a művészetek és az egyetemes kultúra szerelmese számára, akinek elemi belső szükséglete volt a tanítás, az érdek nélküli emberi kapcsolatok építése. A tudományos élet groteszk játszmáit értetlenül szemlélte, aminek részben következményeként 1985-ben a hozzá különösen közel álló latin kultúrát hordozó Venezuelába ment vendégtanárnak.

Itt kisebb kitérők után az Andok világába zárt méridai egyetemen talált tartós megnyugvást. A venezuelai egyetemi, tudományos-kulturális életben még a magyarországinál is nagyobb tisztelet, szeretet és megbecsülés övezte, ez az ország lett második hazája. Személyiségének sajátos kisugárzása folytán, bárhol, idegenben is mindig otthon érezte magát, és képes volt integrálni magában a legkülönbözőbb készségeket. Venezuelában többek között lehetősége nyílt a matematika éles, köolajipari alkalmazásaival kapcsolatba kerülnie.

Szerteágazó érdeklődése és tehetsége jele, hogy életének ebben az időszakában képzett könnyűbúvár, és az üzleti világ által is elismert nemzetközi borszakértő lett. Tudományos igényességgel megírt cikkei a bor világának legrangosabb folyóirataiban népszerűsítették a magyar bort és borászati hagyományokat. Ennek ellenére az emigráció – minden szépsége és sikere ellenére – fájdalmas következményekkel járó törés maradt az életében.

Hosszú nyári szabadságait itthon töltötte, és ezekben az időszakokban a SZTAKI Rendszer- és Irányításelméleti Laboratóriumában talált befogadó szakmai és emberi közegre. Utolsó éveiben – hosszú szünet után – ismét közelebbi szakmai kapcsolatba e megemlékezés szerzőjével, az Ifjú Matematikusok Köréből ismert egykori diáktársával, akivel a nemlineáris rendszerek egy új Volterra reprezentációját fejlesztették ki – egy még vagy már befejezetlen dolgozatban.

2009-ben egy életmentő műtéten esett át, egyúttal kapott egy határozott idejű, 10 éves hosszabbításra szóló orvosi előrejelzést. Utolsó 10 évét így élte le, pergő homokóra mellett. A venezuelai válság elmélyülésével 2016-tól szigorú orvosi felügyelet mellett itthon élt.

Példaértékű, ahogy derűjét és türelmét sohase veszítette el, utolsó telefonbeszélgetéseit is az élet iránti csodálat és hála hatotta át. Hatalmas életereje okán – Elias Canetti szavait idézve – néha talán az volt az illúziója, hogy az ember mindent kibír. Álmában szembesült azzal, hogy olyan az ember élete, „mint a fű, mely reggel kisarjad és fölvirul, de estére lefonnyad, és elszárad.” Requiescat in pace.

Gerencsér László

A QP AKADEMIAI KIVÁLÓSÁG DÍJ 2020. ÉVI DÍJAZOTTJA:  
RÖST GERGELY



A Qualitative Production Gépipari és Kereskedelmi Zrt., valamint a Magyar Tudományos Akadémia 2020-ban QP Akadémiai Kiválóság díjat adományozott Röst Gergelynek kiemelkedő matematikai eredményeiért, a szegedi matematikai epidemiológiai iskola megteremtéséért, a járványok terjedésének modellezésére és a védekezési stratégiákra kidolgozott innovatív matematikai módszereiért, valamint a magyarországi alkalmazott és ipari matematika fejlesztéséért.

**Életpályája röviden**

Röst Gergely matematikus 1977-ben született, 2006-ban szerzett PhD fokozatot köztársasági aranygyűrűvel (*Promotio sub auspiciis praesidentis Rei Publicae*) a Szegedi Tudományegyetemen. Két évig a torontói York Egyetemen volt poszt-doktor a Centre for Disease Modelling matematikai járványtani csoportjában. Fulbright ösztöndíjjal az Arizona State University vendégkutatójaként, majd Marie Curie ösztöndíjjal az Oxfordi Egyetem Wolfson Centre for Mathematical Biology intézetében tudományos munkatársként dolgozott. 2011-2016 között elnyert egy ERC Starting Grantet, majd 2019-2024 között az Élvonala - Kutatói Kiválósági Program pályázatát. Magas szintű publikációs tevékenységét jelzi, hogy 73 tudományos cikkéből 31 Q1-es besorolású folyóiratban jelent meg. Munkáját számos szakmai díjjal ismerték el (a Bolyai Társulat Grünwald Géza Emlékérme, MTA Fiatal Kutatói Díj, Alexits György-díj, Gács András-díj). Nemzetközi elismertségét jelzi, hogy hét tudományos folyóirat szerkesztője, több külföldi konferencia plenáris előadója, valamint 2018-ban Barcelonában a Young Academy of Europe is tagjává választotta. Jelenleg a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének docense, kutatócsoport-vezető.



## Matematikai eredményei

Főbb matematikai eredményei az időkésleltetést tartalmazó differenciálegyenletek és a nemlineáris dinamika témakörébe tartoznak. Meghatározta a legélesebb korlátot a nem-monoton késleltetett visszacsatolásos egyenletek egy fontos osztályának globális attraktoraira. Igazolta kompakt globális attraktor létezését nemkorlátos késleltetésekre, és kiterjesztette a perzisztencia-elméletet végtelen késleltetésekre. Új módszert dolgozott ki bizonyos kaotikus rendszerek kontrollálására. Kiterjesztette a hálózati terjedési folyamatok páralapú modelljeit a nem-markovi esetre. Korábban ismeretlen bifurkációs diagramokat fedezett fel járványterjedési modellekben. Bebizonyította a késleltetett SIS modellek 23 éven át megoldatlan globális stabilitási sejtését.

## Alkalmazott és interdiszciplináris matematika

Munkásságának jellemzője, hogy megtalálja a kapcsolatot az absztrakt elméletek és a gyakorlati alkalmazások között, így például a funkcionálanalízis vagy az algoritmikus topológia módszereit is innovatívan alkalmazta egészségügyi problémákra. Nagy lelkesedéssel, hatalmas energiával mozgósít embereket a közös projektekben való részvételle: több mint 60 társszerzővel dolgozott, akik közül 40 külföldi. Munkájának nagy hatása volt számos betegség (influenza, kanyaró, bárányhimlő, malária, kéknyelv-betegség, ebola, *H. pylori*, chlamydia, HiB, számarköhögés, kullancs-encephalitis) terjedésének modellezésére, az ellenük kidolgozott védekezési stratégiák javításában. Meghonosította Magyarországon a járványok matematikai modellezését. Ezekkel kapcsolatos publikációi nemcsak alkalmazott matematikai, hanem vezető fizikai, biológiai, orvosi és multidiszciplináris lapokban is megjelentek.

## Fiatalok mentorálása

Azonkívül, hogy kiváló kutató, Röst Gergely nagyon sikeres mentor is. Magához vonzza és inspirálja a tehetséges fiatalokat, továbbá az eredményes munkájukhoz képes megteremteni a szükséges feltételeket. Öt egymást követő OTDK-n volt díjnyertes diákköri dolgozat témavezetője. Vezetésével három PhD-hallgató szerzett doktori fokozatot, jelenleg öt doktorandusz témavezetője. Elsőként végzett doktorandusza Knipl Diána, aki Best Research Poster Award díjat nyert a 6. Európai Matematikai Kongresszuson, valamint elnyerte a Farkas Gyula Díjat és a Journal of Biological Dynamics folyóirat 2016-os legjobb cikkéért járó Lord Robert May Award-ot. Mentoráltjai közül öten nyertek Farkas Gyula Díjat. Tíz posztdoktori kutató munkáját irányította, köztük japán, olasz, német, kínai, spa-

nyol, francia matematikusokét. Tanítványai a következő generáció legígéretesebb kutatói között vannak.

### **Magyar ipari matematika fejlesztése**

Röst Gergely a számos ipari matematikai projektet lebonyolító HU-MATHS-IN - Magyar Ipari és Innovációs Matematikai Szolgáltatási Hálózat egyik meghatározó személyisége, a Bolyai Intézet ipari kapcsolatainak szervezője. Koordinálja az intézetben a Bosch, valamint a GE Healthcare vállalatok számára végzett fejlesztéseket. Létrehozta az alkalmazott matematika mesterszakon a műszaki matematika (az angol nyelvű MSc programban „industrial mathematics”) specializációt. Csatlakoztatta az ECMI-hez (European Consortium for Mathematics in Industry) a Bolyai Intézetet, ami munkájának köszönhetően a közeljövőben ECMI európai ipari matematikai képzési helyé válik.

### **A matematika népszerűsítése, jelentőségének közérthető bemutatása**

A matematikát népszerűsítő előadásai (köztük számos televíziós előadás, például a Mindenki Akadémiája, a Mindentudás, a Kvantum című műsorokban), publikációi igen sikeresek. Több, járványokkal kapcsolatos modellezési munkája (kanyaróveszély a 2012-es labdarúgó EB-n, influenza terjedése a hosszú repülőjáratokon, a 2014-es ebola járvány utolsó szakaszának pontos előrejelzése) komoly médiaérdeklődést váltott ki. A nemrég indult Érintő e-matlap, a Bolyai Társulat matematika népszerűsítő magazinja Gazda(g)ság rovatának vezetője.

### **Innovatív gyakorlati alkalmazások**

Röst Gergely munkáinak gyakorlati alkalmazhatóságát mutatja, hogy az influenza elleni antivirális szerekek kapcsolatos cikksorozatának eredményei beépültek többek között Kanada, Katalónia és Massachussets járványügyi tervébe. A kanadai közegészségügyi szervezetek döntéselőkészítését segítő Pan-Inform Canada egyetlen nem-kanadai tagja. Meghívott előadó volt a dél-koreai járványügyi központban (KCDC) és Japán legjelentősebb járványmodellező iskolájában. Elemzéseivel és védőoltási stratégiák modellezésével segítette az Országos Tisztifőorvosi Hivatal, az Országos Epidemiológiai Központ és a Nemzeti Népegészségügyi Központ szakembereinek munkáját, de társszerzői között vannak egyéb neves járványügyi szakemberek, többek között kanadai, amerikai és svéd közegészségügyi és járványügyi szervezetek munkatársai is.

A fenti felterjesztés 2019 novemberében készült. Röst Gergely 2020-ban – kutatási és oktatási tevékenységének folytatása mellett – aktívan és eredményesen részt vett a koronavírus-járvány elleni harcban modellezéseivel, elemzéseivel.

Csendes Tibor, Demetrovics János, Gerencsér László, Gyimóthy Tibor, Hatvani László, Krisztin Tibor, Leindler László, Major Péter, Páles Zsolt, Pethő Attila, Rónyai Lajos, Simon L. Péter, Stipsicz András, Szász Domokos és Totik Vilmos

felterjesztők

A PRÉKOPA ANDRÁS-DÍJ 2020. ÉVI DÍJAZOTTJA:  
SZÁNTAI TAMÁS



Az MTA Matematikai Tudományok Osztálya a 2020. évi Prékopa András-díjat<sup>1</sup> Szántai Tamásnak ítélte oda az operációkutatásban és azzal rokon területeken elért elméleti és gyakorlati eredményeiért.

**Pályafutásának rövid áttekintése**

Dr. Szántai Tamás a BME emeritusz professzora, Prékopa András volt tanítványa. Tanulmányait az ELTE matematikus szakán végezte 1964 és 1969 között. Később aspiráns volt az MTA SZTAKI Operációkutatási Osztályán Prékopa András témavezetésével. A matematikai tudomány kandidátusa fokozatot 1985-ben szerzte meg. Ez alapján az ELTE 1995-ben PhD fokozatot adott neki. Az MTA doktora címet 2005-ben szerezte meg.

A BME Villamosmérnöki Kara Matematika Tanszékén, a BME Gépészmérnöki Kara Matematika Tanszékén, az ELTE TTK Operációkutatási Tanszékén, majd ismét a BME Gépészmérnöki Kara Matematika Tanszékén és később annak jogutódján, a BME TTK Differenciálegyenletek Tanszékén dolgozott tudományos segédmunkatársi, tudományos munkatársi, egyetemi adjunktusi, egyetemi docensi, majd egyetemi tanári beosztásban. Az ELTE TTK Operációkutatási Tanszékének 1988 és 1992 közt megbízott, a BME Gépészmérnöki Kara Matematika Tanszékének 1993 és 1996 közt kinevezett, majd a BME TTK Differenciálegyenletek Tanszékének 1998 és 2000 közt megbízott, 2000 és 2011 közt pedig kinevezett tanszékvezetője volt.

---

<sup>1</sup><https://mta.hu/iii-osztaly/prekopa-andras-dij-110640>

A BME Matematikai Intézete tanszékvezetőjeként folyamatosan szervezte szemeszterenként 1000-nél több mérnök, műszaki menedzser és közgazdász hallgató matematikai „tömegoktatását”, valamint kb. 60 mérnök-fizikus és 20-25 matematikushallgató „elitoktatását”. Tagja volt a BME TTK Kari Tanácsának, a BME Egyetemi Tanácsának, törzstagja volt a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolának. Részt vett a BME TTK matematikus oktatási szakbizottsága, a BME GTK közgazdász oktatási szakbizottsága, a BME TTK gazdasági szakbizottsága munkájában, illetve vezetője volt a BME TTK akkreditációs szakbizottságának.

Aziz Habib egyiptomi matematikus 1999-ben a témavezetésével szerzett kandidátusi fokozatot, Gyarmati József (2003) és Ashraf Gouda (2005) PhD fokozatot szerzett témavezetésével. Bukszár Józsefnek ugyan nem volt témavezetője, de az általa 2000-ben megvédett PhD értekezése részben a közös kutatómunkájuk eredménye volt.

Kutatási területe korábban a valószínűségszámítás és matematikai statisztika volt, később az operációkutatás sztochasztikus modelljei. Jelenlegi érdeklődési területe a sztochasztikus programozás számítógépes módszerei és azok alkalmazási lehetőségei.

Aktív tudományszervezési munkát folytatott: részt vett a Central European Journal of Operations Research, az Alkalmazott Matematikai Lapok és a Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem Repüléstudományi Közlemények időszaki kiadványának szerkesztésében. Kiemelendő, hogy az Alkalmazott Matematikai Lapoknak nemcsak szerkesztője, hanem 1975 és 1991 között technikai szerkesztője, 1991 és 2001 között felelős szerkesztője, majd 2003 után főszerkesztő helyettese is volt.

Számos tudományos társaságnak volt aktív tagja: a Mathematical Programming Society Committee on Stochastic Programming vezetőségi tagja volt (1992-2001), a Bolyai János Matematikai Társulat tagja 1969-től, az Alkalmazott Matematikai Szakosztály alelnöke 1988 és 1993 között, a Magyar Operációkutatási Társaság alapító tagja (1991-), titkára (1991-1993 és 2000-2002), alelnöke (1993-1995 és 2004-2006), elnöke 2002 és 2004 között. A Neumann János Számítógéptudományi Társaság tagja 1970-től, az MTA Operációkutatási Bizottsága tagja 1993-tól, MTA közgyűlési képviselő 1995 és 2001 között. Az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíj Kuratórium Szakértői Kollégium tagja 2001 és 2003 között, a Magyar Akkreditációs Bizottság Matematika- és Számítástudományok Bizottságának tagja volt 2001 és 2003 között.

Számos kitüntetést és elismerést kapott: Farkas Gyula Díjat (1976), a Kiváló Dolgozó kitüntetést (1990), a BME József Nádor Emlékérmét (2012), és a Magyar Operációkutatási Társaság Egerváry Jenő Emlékplakettjét (2012).

Külföldi kapcsolatai értékesek, rendszeresen meghívják operációkutatási konferenciákra, számos külföldi matematikussal munkakapcsolatot tartott fenn (például H. Gassmann, K. Marti, J. Dupacova, W. Römis, R. Henrion). Többször volt hosszabb ideig külföldön, így az aspirantúra idején, az 1970-es években Angliában, majd a 2000-es évek elején az Amerikai Egyesült Államokban.

### Kiemelt tudományos eredményei és azok hatása

Kutatási területe röviden az operációkutatás sztochasztikus modelljeinek számítógépes eljárásai, vagyis eredményeinek többsége alkalmazott matematika jellegű. 100-nál több tudományos cikket írt, jelenleg is folyamatosan jelennek meg cikkei. Az MTMT alapján 600 hivatkozás történt cikkeire, ezek közül több mint 500 független hivatkozás, és több mint 400 a külföldi. Tevékenysége szerteágazó, csak röviden érintjük munkásságában a legfontosabb területeket.

1995-ben Prékopa András megjelentetett a Kluwer kiadónál egy enciklopédikus, több mint 600 oldalas könyvet a sztochasztikus programozás akkori helyzetéről. Ebben a műben több fejezetben is részletesen ismerteti Szántai Tamással közösen, illetőleg Szántai egyedül elért eredményeit, például a Balaton vízszint-szabályozásáról, valószínűségek kiszámításáról, vagy a Szántai Tamással együtt megkonstruált többdimenziós gamma eloszlásról (42 független idéző van az eloszlásfüggvény kiszámításáról szóló cikke, amelynek egyedüli szerzője Szántai).

Szántai Tamás legfontosabb eredménye megítélésünk szerint a többdimenziós normális és más eloszlások eloszlásfüggvénye kiszámítási eljárásainak kidolgozása. Ezeken az algoritmusokon az egyetem elvégzése óta évtizedeken át dolgozott, a legutóbbi években is jelentek még meg az eljárások finomításai és gyorsításai. A számítási algoritmusok alapötlete a Bonferroni egyenlőtlenségek és azok kiterjesztése és kreatív alkalmazása. Ezekkel az eljárásokkal a valószínűségek értékét alulról és felülről is korlátozni tudta, így számítástechnikai szempontból gyors algoritmust kapott annak ellenére, hogy egy valószínűség helyett sokkal több valószínűséget kellett kiszámítani. A hipercseresznye fák segítségével ennek az eljárásnak nagyon gyors verzióját sikerült kidolgoznia. Szántai kandidátusi és MTA doktori dolgozata is nagyrészt ezeket az eredményeket tartalmazza.

A valószínűségek kiszámítására kifejlesztett algoritmusok összehasonlítását Gassmann, Deák és Szántai közös cikkükben végezték el, amire 55 hivatkozás érkezett (az MTMT szerint). Ezeket az eloszlás kiszámítási eljárásokat elsősorban a többdimenziós normális eloszlás függvényértékeire alkalmazta, bár gamma, Dirichlet és más eloszlásokra is fel lehet használni. Ashraf Gouda PhD hallgatójával kidolgoztak egy szép rekurzív algoritmust a Dirichlet eloszlás eloszlásfüggvényének pontos kiszámítására is. Valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modell optimalizálásának számítógépes programjáról szóló, egy-szerzős cikkére 41 hivatkozás történt.

Szántai tevékenysége nem maradt a sztochasztikus programozás, vagy az eloszlásfüggvények értékeinek kiszámítása területén. Az általa vizsgált, és megoldott alkalmazások közül említjük útgazdálkodásról írt, Bakó Andrással közös cikküket, árvíz tározók méretezéséről szóló, Prékopa Andrással közös cikküket, amerikai opciók értékeléséről Prékopa Andrással és Bukszár Józseffel közölt eredményeket, valamint a „ $k$ -ból  $r$   $n$ -ből  $F$ ” rendszerekről Aziz Habib-bal írt dolgozatait.

Legújabb érdeklődési területei a grafikus valószínűségi modellek és azok alakfelismerési alkalmazásai, valamint az együttes valószínűségeloszlások kopulák általi modellezése. Ezeken a területeken Kovács Edith-tel vannak közös publikációik.

Páles Zsolt, Frank András, Csendes Tibor, Galántai Aurél, Deák István,  
Bozóki Sándor, Gerencsér László és Kis Tamás  
felterjesztők

AZ EGERVÁRY JENŐ EMLÉKPLAKETT 2019. ÉVI DÍJAZOTTJA:  
TEMESI JÓZSEF



Az Egerváry Jenő emlékplakettet a Magyar Operációkutatási Társaság 2019-ben Temesi Józsefnek (Budapesti Corvinus Egyetem, professzor emeritus) ítélte oda az operációkutatás, a döntéselmélet és a felsőoktatás-menedzsment és -stratégia terén elért kutatói, oktatói, alkalmazói és vezetői tevékenységéért, valamint a Magyar Operációkutatási Társaság szakmai munkájához való jelentős hozzájárulásáért.

### **Életútja**

Temesi József 1950. május 12-én született. Egyetemi diplomáját a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen (jelenleg Budapesti Corvinus Egyetem) szerezte 1974-ben, a népgazdasági tervező-elemző szak gazdaságmatematikai szakágazatán. 1977-ben doktorált, kandidátusi fokozatát 1992-ben szerezte, 1998-ban habilitált.

### **Oktatási és vezetői tevékenysége**

Egyetemi oktatói pályáját 1974-ben kezdte a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematika Tanszékén, majd a Matematikai és Számítástudományi Intézet Operációkutatási Osztályán, 1989-től az Operációkutatás Tanszéken, amelynek 2000-2014 között tanszékvezető egyetemi tanára, 2015-től professzor emeritus.

1987-ben 6 hónapot töltött a chicagói Northwestern University-n, 1994-ben 5 hónapot a szintén amerikai egyesült államokbeli University of New Hampshire-en.



1989-1992 között a Közgazdaságtudományi Kar dékánhelyettese, majd 1992-1995 között dékánja. 1995-1998 között oktatási és tudományos rektorhelyettes, 2000-2004 között oktatási rektorhelyettes. 1991-2007 között az International Studies Center oktatási igazgatója. 2008-2010 között a Nemzetközi Felsőoktatási Kutatások Központja ügyvezető igazgatója, 2008-2014 között társigazgatója.

Tudományos közleményeinek száma 100 feletti. 9 könyv szerzője vagy társszerzője, 19 könyv szerkesztője vagy társszerkesztője.

### **Tudományos, szakmai és közéleti tevékenysége**

Temesi József kutatási és oktatási, valamint szakértői és tanácsadási területei az operációkutatás, lineáris programozás, többcélú programozás, döntésemélet, döntéstámogató rendszerek, valamint a felsőoktatás-politika és oktatásfinanszírozás.

Pályája kezdetétől fogva dolgozott gazdasági döntési, tenderértékelési, optimalizálási, kockázatelemzési és előrejelzési problémákon, minisztériumi (pl. Nehézipari Minisztérium, Pénzügyminisztérium, Ipari Minisztérium, Gazdasági Minisztérium, Oktatási Minisztérium), és intézményi (pl. Tervgazdasági Intézet, Országos Vízügyi Hivatal, EXPO Iroda) megbízások keretében. 2002-2005 között a Magyar Rektori Konferencia közgazdasági szakcsoport egyetemi szintű Bologna képviselője, 2003-2006 között a Bologna-reform előkészítésében vett részt. Több OTKA, NFKP és TÁMOP kutatás vezetője, ill. résztvevője.

1987 óta az International Multi-Criteria Decision Making Society tagja, 1996-1998 között a European Association for International Education vezetői testületének, 2004-2006 között a Magyar Akkreditációs Bizottság Gazdaságtudományi Szakbizottságának, 2008-2011 között az Országos Kredittanács tagja. A Magyar Operációkutatási Társaság tagja, vezetőségi tagja, 2006-2008 között elnöke. A Gazdaságmodellezési Társaság tagja, elnökhelyettese, majd elnöke. Az MTA Operációkutatási Tudományos Bizottságának tagja több ciklusban.

2002-2009 között a Társadalom és gazdaság folyóirat főszerkesztője, 1991 óta a Sigma matematikai-közgazdasági folyóirat társszerkesztője, az International Journal of Technology, Modeling and Management, valamint a Society and Economy folyóiratok szerkesztőbizottsági tagja.

Első cikkei, tanulmányai az MKKE Matematika Tanszék műhelyéből kerültek ki. A többcélú programozás elméleti kérdései és alkalmazásai jelennek meg az 1980-as években többek között Forgó Ferencsel, Stahl Jánossal, Pór Andrással közös angol nyelvű cikkeiben, az Engineering Cost and Production Economics és a Pure Mathematics and Applications folyóiratokban. Kandidátusi értekezésében a többcélú programozási problémák interaktív megoldási módszereivel foglalkozik. Ez a vonal a későbbiekben is megmarad munkásságában, amikor a véges többcélú döntési módszerek vizsgálata kerül kutatásai középpontjába.

Publikációiban és konferencia szerepléseiben kiemelt figyelmet szentelt a Thomas Saaty által kifejlesztett Analytic Hierarhy Process többcélú döntési módszertan tulajdonságaira, egyes elemeinek kritikájára és az alkalmazás egyes kérdéseire. Ezen a területen különösen termékenynek bizonyult az MTA SZTAKI kutatóival folytatott több évtizedes együttműködés. A gazdasági döntések módszertani témájában 2003 és 2019 között három összefüggő OTKA-kutatásban dolgoztak együtt, ezek közül kettőben témavezető volt. A műhelymunka közös, egyetemi-kutatóintézeti kihelyezett tanszéki keretekben folyt: Rapcsák Tamással, Fülöp Jánossal és Bozóki Sándorral több cikket is jelentettek meg angolul az *Annals of Operations Research* és a *European Journal of Operational Research* folyóiratokban, magyar nyelven pedig a *Sigma matematikai-közgazdasági folyóiratban*. Kutatásaiban az elméleti kérdéseket (páros összehasonlítási mátrixok elemeinek meghatározása és a mátrix konzisztenciája, skálaproblémák) az alkalmazás alapkérdéseivel összekötve vizsgálta többek között a *Central European Journal of Operations Research* és a *Sigma* önálló cikkeiben.

2002-ben megjelent „A döntésmélet alapjai” című könyve ma is az egyetemi döntési kurzusok alapirodalma, csakúgy, mint a matematikai programozási tantárgyak esetében a Gáspár Lászlóval az 1980-as években írt két tankönyvének, vagy a Varró Zoltánnal közös legújabb operációkutatási könyv több kiadása.

### Főbb díjai és kitüntetései

Széchenyi Professzori Ösztöndíj, 1998

A Magyar Köztársasági Érdemrend tisztikeresztje (polgári tagozat), 2006

Ezüst Corvina, 2014

Krekó Béla-díj, 2016

AZ EGERVÁRY JENŐ EMLÉKPLAKETT 2020. ÉVI DÍJAZOTTJA:  
DEÁK ISTVÁN



Az Egerváry Jenő emléklakettet a Magyar Operációkutatási Társaság 2020-ban Deák Istvánnak (Budapesti Corvinus Egyetem, professzor emeritus) ítélte oda az operációkutatásban, a sztochasztikus optimalizálásban elért kutatói, oktatói, alkalmazási és vezetői eredményeiért, valamint a tudományos közéleti tevékenységéért.

**Életútja**

1945-ben született Budapesten. 1969-ben kapott matematikus diplomát; az Eötvös Loránd Tudományegyetemen végzett, numerikus matematikai és operációkutatási szakirányon. 1971-ben egyetemi doktori címet kapott az ELTE-n operációkutatásból. 1982-ben elnyerte a matematikai tudomány kandidátusa címet. 1995-ben a Budapesti Műszaki Egyetemen PhD fokozatot kapott. 1999-ben az ELTE-n habilitált doktori címet szerzett. 2006-ban elnyerte az MTA doktora címet.

1969-72 között a Műegyetem Villamosmérnökkari Matematika Tanszékén dolgozott. 1972-91 között a MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézetében dolgozott, 1982-től tudományos főmunkatársi beosztásban. 1990-től osztályvezető helyettes. 1991-2005 között a Műegyetemen dolgozott, 1992-től docensként. Először a Villamosmérnökkari Matematika Tanszéken, később a Differenciálegyenletek Tanszéken. 2005-től a Budapesti Corvinus Egyetem Számítástudományi Tanszékének egyetemi tanára. Hat éven át párhuzamosan a Nyíregyházi Főiskolán is tanított. 2014 óta a Budapesti Corvinus Egyetem professzor emeritusa.

Több neves külföldi egyetemen tanított vendégprofesszorként. SZTAKI-s éveiközben két évet dolgozott a kanadai Dalhousie Egyetemen és másfél évet a Wisconsin-Madison Egyetemen. Műegyetemi éveiközben, 1997-98 között a Zürichi Egyetem Operációkutatási Intézetében dolgozott, 2012-ben pedig a Rutgers Egyetemen. Vendégprofesszori megbízatásai alatt mind egyetemistáknak, mind doktorandusz hallgatóknak tartott előadásokat.

### **Tudomány- és oktatásszervezési tevékenysége**

A SZTAKI-ban 1978-84 között a „Sztochasztikus és nagyméretű rendszerek” csoportot, majd 1987-89 között a „Párhuzamos számítógépek és szakértői rendszerek” csoportot vezette. 2008-2010 között a BCE Számítástudományi Tanszékét vezette. 2006-2008 között a BCE Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskolájának Gazdaságinformatika Doktori Programja megalakításában dolgozott. 2009-től a program igazgatója volt.

### **Oktatói és kutatói tevékenysége**

Aktív oktatói pályája közel öt évtizedes. (SZTAKI-s éveit alatta is tanította az ELTE-n, illetve a BME-n mint megbízott előadó.) Emeritus professzorként is foglalkozik doktorandusz hallgatókkal. Oktatott általános matematikai tárgyakat, valószínűségszámítással kapcsolatos tárgyakat és operációkutatási témákat.

Nagyszabású alkalmazási és kutatás-fejlesztési munkákban vett részt:

- a magyar villamosenergiaipar sztochasztikus modelljének felépítése, az Országos Tervhivatal számára,
- az ország villamosenergia termelésének napi ütemezése, a Magyar Villamos Művek Tröszt számára,
- Dunai Vasmű hideghengerversor termelésének ütemezése, illetve hosszútávú komplex termelés-tervezési és prognosztikai programcsomag kifejlesztése a Vasmű szükségleteire,
- villamos távvezetékek korróziójának vizsgálata.

Elméleti kutatási tevékenysége több területen is kapcsolódik az alkalmazásokhoz, ipari és gazdasági rendszerek nagyméretű és sztochasztikus optimalizálásával kapcsolatos kérdésekhez.

Monte Carlo módszerekkel, véletlenszám-generálási algoritmusokkal, szimulációs és numerikus módszerekkel kapcsolatos eredményei között különösen nagy jelentőségűek a többdimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvényének kiszámítására kidolgozott eljárása, valamint néhány véletlenszám-generálási algoritmus.

Párhuzamos számítógépekkel kapcsolatos problémákkal is foglalkozik, különösen az optimalizálás és a szimuláció szekvenciális algoritmusainak párhuzamosításával.

Fontos eredményeket ért el szukcesszív regressziós közelítéseknek a sztochasztikus programozásban való felhasználásával. Új, regresszió alapuló nemlineáris optimalizálási eljárásokon dolgozik, amelyek zajos függvények esetén is alkalmazhatók.

Több fontos OTKA pályázatban vett részt Prékopa András irányítása alatt, és jelentős projektek témavezetője volt. 1992-97 között részt vett a hét országra kiterjedő Central European Initiative „Parallel Computation” elnevezésű projektjében.

Száz tudományos cikket vagy tanulmányt írt. Két angol nyelvű és három magyar nyelvű szakkönyv szerzője, illetve társszerzője. Két felsőoktatási tankönyv szerzője. Munkáira több mint 500 független hivatkozás ismert.

Neves külföldi egyetemeken tartott előadást a kutatásairól (pl. Graz, Zürich, Groningen, Eindhoven, Delft, Aarhus, Koppenhága, Lingby). Észak-amerikai tartózkodásai alatt is több mint húsz egyetemen tartott előadást.

### **Tudományos közéleti tevékenysége**

Számos konferencia szervezésében vett részt, a programbizottság vagy szervezőbizottság tagjaként. Az 1992. évi mátrafüredi „XI. International Conference on Operations Research” társelnöke volt.

Az alábbi tudományos testületek tagja:

- Magyar Operációkutatási Társaság,
- Neumann János Számítógép-tudományi Társaság,
- Stochastic Programming Society (a Mathematical Optimization Society technikai szekciója),
- EURO Working Group on Stochastic Optimization.

Két ciklusban is a MOT alelnöke volt. A Magyar Tudományos Akadémia Operációkutatási Bizottságának tagja. Egy korábbi ciklusban a Bizottság titkára volt.

### **Főbb díjai és kitüntetései**

1976-ban Farkas Gyula díjat kapott a STABIL sztochasztikus programozási modell villamosenergiaipari alkalmazásában végzett munkájáért.

Két ízben elnyerte a SZTAKI Igazgatói Díját, és két ízben a SZTAKI Intézeti Díját, kutatási eredményeiért és ipari alkalmazásokban végzett tudományos és szervezői munkájáért.

2006-ban oktatói munkájának elismeréseként a BME Természettudományi Karának Hallgatói Önkormányzata a „Kiváló oktató” címet szavazta meg számára.

A GYIRES BÉLA-DÍJ 2020. ÉVI DÍJAZOTTJA:  
CSOMÓS PETRA



Az MTA III. Matematikai Tudományok Osztálya 2020-ban Csomós Petrának ítélte oda a Gyires Béla-díjat<sup>1</sup>.

### 1. Pályafutásának áttekintése

Csomós Petra 1980-ban született Budapesten, 2003-ban az ELTE TTK-n szerzett meteorológus és csillagász diplomát kitűnő minősítéssel. Tanulmányai alatt a *Matematikai és számítógépes vizsgálatok a légköri modellezésben* című dolgozatával I. díjban részesült az Országos Tudományos Diákköri Konferencián, 2003-ban pedig elnyerte az ELTE TTK-n a Kar Kiváló Hallgatója címet.

2008-ban szerzett PhD fokozatot alkalmazott matematikából az ELTE-n. Ezután másfél évet a Darmstadti Műszaki Egyetemen, majd szülési szabadságot követően két és fél évet az Innsbrucki Egyetemen töltött kutatói és posztdoktori pozíciókban. 2013-ban hazatért, és az MTA-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoportjában tudományos munkatársaként folytatta munkáját 2015-ig, amikor adjunktussá nevezték ki az ELTE Matematikai Intézetében, ahol jelenleg is dolgozik. Félállásban továbbra is az MTA-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoportjában végez kiemelkedően aktív kutatómunkát. 2016-ban OTKA posztdoktori ösztöndíjat nyert el jelentős versenyben.

Csomós Petra kutatási területei az alkalmazott matematika széles spektrumát fedlelik a parciális differenciálegyenletek numerikus módszereitől a funkcionálanalízisen át a fizikai alkalmazásokig.

Tudományos munkásságát több díjjal is elismerték. 2009-ben elnyerte a Bolyai János Matematikai Társulat által fiatal magyar matematikusok kiemelkedő alkalmazott matematikai munkásságának jutalmazására alapított

---

<sup>1</sup><https://mta.hu/iii-osztaly/gyires-bela-dij-105585>

Farkas Gyula emlékdíját. 2014-ben a visegrádi országok tudományos akadémiáit tömörítő The Visegrad group of Academies szervezet fiatal kutatóknak szóló Young Researcher Award elismerésben részesült. 2018-ban Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat, 2019-ben pedig az Új Nemzeti Kiválósági Program ösztöndíját nyerte el. Ugyanezen évben sikeres pályázatával elnyert egy két éves DAAD támogatást is.

## 2. Szakmai tevékenysége

Csomós Petra kutatómunkáját az alkalmazott analízis területén végzi. Fő kutatási témái a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldási módszereinek funkcionálanalízis segítségével végzett vizsgálatát, továbbá azok alkalmazását is felölelik. Munkája során az alábbi kutatási területeken ért el eredményeket:

- operátor-szeletelési eljárások vizsgálata,
- operátor-szeletelési eljárások alkalmazása késleltetést tartalmazó egyenletekre,
- a sekélyfolyadék-egyenletekre felírt lineáris szabályozás feladat hatékony numerikus megoldási módszerei,
- numerikus analízisbeli stabilitási és konvergencia kérdések, fizikai alkalmazások.

Az alábbiakban részletesen ismertetjük az egyes területeken szerzőtársaival együtt elért eredményeit, és megadjuk a vonatkozó tudományos dolgozatok elérhetőségét.

### 2.1. Operátor-szeletelési eljárások vizsgálata

Az alkalmazásokban előforduló időfüggő folyamatok esetén nagyon gyakori, hogy az időbeli megváltozás több, egymástól független hatás eredménye. Az ilyen típusú folyamatoknak megfelelő modellekben a parciális differenciálegyenletekben az időbeli deriváltat a térváltozó szerinti differenciáloperátorok összege adja meg. Ezen problémák numerikus megoldása hatékonyan állítható elő az egyes hatásoknak megfelelő részfeladatok megoldásaiból az úgynevezett operátor-szeletelési eljárások alkalmazásával.

Csomós Petra ezen eljárások hibáját vizsgálva azt találta, hogy csak akkor érdemes az operátor-szeletelési eljárás rendjénél magasabb rendű idődiszkretizációt alkalmazni, ha annak lépésköze jóval kisebb az operátor-szeletelési eljárás lépésközénél (pontosabban annak bizonyos hatványánál). A szekvenciális és a Strang-féle operátor-szeletelési eljárásokat különféle időbeli és térbeli diszkretizációkkal együtt a légszennyezés terjedését leíró differenciálegyenletre alkalmazva azt is megmutatta, hogy az operátor-szeletelési eljárások egyik nagy előnye éppen abban rejlik, hogy a részfeladatokra a nekik megfelelő diszkretizációk alkalmazhatók, így csökkentve a futási időt a stabilitás megtartása mellett. Vizsgálta még, mely esetekben csökkenthető a futási idő az operátor-szeletelési eljárások párhuzamosításával.

Az ezzel kapcsolatos elméleti meggondolásokat a Danish Eulerian Model nevű, légszennyezés terjedést leíró modell futtatása során kapott numerikus eredményekkel is kiegészítette.

Az operátor-szeletelési eljárások konvergenciája a funkcionálanalízis segítségével is vizsgálható. Ekkor általában feltétel, hogy az absztrakt módon felírt evolúciós egyenletben szereplő (térváltozó szerinti) differenciáloperátorok egy-egy erősen folytonos operátor-félcsoport generátorai legyenek. A konvergencia ekkor a Chernoff-féle szorzatformulából adódik. Csomós Petra kutatásai során ezen szorzatformulának a térbeli diszkretizációt is magába foglaló általánosításának alkalmazásával megmutatta, hogy a vizsgált operátor-szeletelési eljárások konvergenciája térbeli és (A-stabil) időbeli diszkretizációk alkalmazásakor is érvényben maradnak. Ezen eredményeket általánosította olyan (nemautonóm) esetre is, amikor a differenciáloperátorok függenek az időtől.

1. BÁTKAI, P. CSOMÓS, B. FARKAS AND G. NICKEL: *Operator splitting with spatial-temporal discretization*, Spectral Theory, Mathematical System Theory, Evolution Equations, Differential and Difference Equations Operator Theory: Advances and Applications, Vol. **221**, pp. 161-171 (2012). DOI: [10.1007/978-3-0348-0297-0\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0297-0_9)
2. BÁTKAI, P. CSOMÓS, B. FARKAS AND G. NICKEL: *Operator splitting for non-autonomous evolution equations*, Journal of Functional Analysis, Vol. **260**, pp. 2163-2190 (2011). DOI: [10.1016/j.jfa.2010.10.008](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.10.008)
3. BÁTKAI, P. CSOMÓS AND G. NICKEL: *Operator splittings and spatial approximations for evolution equations*, Journal of Evolution Equations, Vol. **9**, pp. 613-636 (2009). DOI: [10.1007/s00028-009-0026-6](https://doi.org/10.1007/s00028-009-0026-6)
4. P. CSOMÓS, I. FARAGÓ AND Á. HAVASI: *Weighted sequential splittings and their analysis*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. **50**, pp. 1017-1031 (2005). DOI: [10.1016/j.camwa.2005.08.004](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.08.004)
5. P. CSOMÓS: *Analytical solutions and numerical experiments for optimizing operator splitting procedures*, Időjárás, Quarterly Journal of the Hungarian Meteorological Service, Vol. **110**, pp. 379-415 (2006). [www.met.hu/en/ismeret-tar/kiadvanyok/idojaras/index.php?id=237](http://www.met.hu/en/ismeret-tar/kiadvanyok/idojaras/index.php?id=237)
6. P. CSOMÓS: *Operator splitting procedures for air pollution transport models*, Large-Scale Scientific Computing, Lecture Notes in Computer Science, Vol. **3743**, pp. 331-338 (2006). DOI: [10.1007/11666806\\_37](https://doi.org/10.1007/11666806_37)
7. P. CSOMÓS, I. DIMOV, I. FARAGÓ, Á. HAVASI AND Tz. OSTROMSKY: *Computational complexity of weighted splitting scheme on parallel computers*, International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems, Vol. **223**, pp. 137-147 (2007). DOI: [10.1080/17445760601111517](https://doi.org/10.1080/17445760601111517)
8. P. CSOMÓS: *Analysis of a transport model applying operator splitting and semi-Lagrangian method*, International Journal of Computational Science and Engineering, Vol. **3**, pp. 245-254 (2007). DOI: [10.1504/IJCSE.2007.018263](https://doi.org/10.1504/IJCSE.2007.018263)
9. P. CSOMÓS AND I. FARAGÓ: *Error analysis of the numerical solution of split differential equations*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. **48**, pp. 1090-1106 (2008). DOI: [10.1016/j.mcm.2007.12.014](https://doi.org/10.1016/j.mcm.2007.12.014)
10. P. CSOMÓS: *Some aspects of interaction between splitting procedures and numerical methods*, Advances in Air Pollution Modeling for Environmental Security, NATO Science Series, Vol. **54**, pp. 77-91 (2005). DOI: [10.1007/1-4020-3351-6\\_8](https://doi.org/10.1007/1-4020-3351-6_8)



11. P. CSOMÓS, I. FARAGÓ AND Á. HAVASI: *Operator splitting and global error analysis*, Air Pollution Processes in Regional Scale, NATO Science Series, Vol. **30**, pp. 37-44 (2003). DOI: [10.1007/978-94-007-1071-9\\_5](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1071-9_5)

## 2.2 Operátor-szeletelési eljárások alkalmazása késleltetést tartalmazó egyenletekre

A mindennapjainkban megjelenő időfüggő folyamatok nagy része késleltetést is tartalmazó differenciálegyenlettel írható le. Az absztrakt módon felírt, késleltetést tartalmazó egyenletekre alkalmazott operátor-szeletelési eljárások konvergenciáját Csomós Petra a funkcionálanálízis eszköztárának segítségével vizsgálta. Alapfeltevése, hogy az absztrakt egyenletben megjelenő (térváltozó szerinti) differenciáloperátor egy erősen folytonos operátor-félcsoport generátora, a késleltetést leíró operátor pedig lineáris és korlátos. Mivel a késleltetést tartalmazó egyenletek a megfelelő szorzattéren felírhatók absztrakt evolúciós egyenletként, az operátor-szeletelési eljárások konvergenciájának vizsgálata visszavezethető az előző pontbeli esetekre. Az eredmények általánosíthatók nemautonóm lineáris és nemlineáris disszipatív esetekre is.

1. A. BÁTKAI, P. CSOMÓS AND B. FARKAS: *Operator splitting for dissipative delay equations*, Semigroup Forum, Vol. **95**, pp. 345-365 (2017). DOI: [10.1007/s00233-016-9812-y](https://doi.org/10.1007/s00233-016-9812-y)
2. A. BÁTKAI, P. CSOMÓS AND B. FARKAS: *Operator splitting for dissipative delay equations*, In: P. Steinmann, G. Leugering (eds) PAMM Special Issue: 85th GAMM Annual Meeting, Wiley-VCH Verlag, pp. 989-990 (2014). DOI: [10.1002/pamm.201410475](https://doi.org/10.1002/pamm.201410475)
3. A. BÁTKAI, P. CSOMÓS AND B. FARKAS: *Operator splitting for nonautonomous delay equations*, Computers & Mathematics with Applications, Vol. **65**, pp. 315-324 (2013). DOI: [10.1016/j.camwa.2012.05.001](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.05.001)
4. P. CSOMÓS AND G. NICKEL: *Operator splitting for delay equations*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. **55**, pp. 2234-2246 (2008). DOI: [10.1016/j.camwa.2007.11.011](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.11.011)

## 2.3. A sekélyfolyadék-egyenletekre felírt lineáris szabályozás feladat hatékony numerikus megoldási módszerei

A sekélyfolyadék-egyenletek az áramlástanban kiemelkedő szerepet játszó Navier-Stokes-egyenletek azon egyszerűsítéséből adódnak, amely még kiválóan alkalmas a természetben megfigyelhető nagyskálájú mozgások leírására (hullámok kialakulása tó vagy folyóvíz felszínén, nagy kiterjedésű meteorológiai képződmények mozgása). Alapfeltevés, hogy a folyadék vertikális kiterjedése jóval kisebb a horizontális méreténél, így a vertikális irányú gyorsulás elhanyagolható. Csomós Petra megmutatta, hogy fizikailag is értelmes peremfeltétel esetén az absztrakt módon felírt egyenletekben megjelenő (térváltozó szerinti) differenciáloperátor erősen folytonos (kontrakció) félcsoportot generál.

A sekélyfolyadék-egyenletekre felírt szabályozási egyenlet az árvízvédelemben játszhat fontos szerepet. Csomós Petra ezen egyenletre alkalmazott operátor-szeletelési eljárásokat és exponenciális Euler-módszert, és mutatta meg ezek konvergenciáját az irodalomban is széleskörűen elfogadott feltételek mellett. A dinamikát leíró operátor generátor volta éppen Csomós Petra előző eredménye miatt tudható. Egy másik dolgozatában Csomós Petra numerikus kísérletekkel is illusztrálta ezen módszerek hatékonyságát a szokásos módszerekkel szemben.

1. P. CSOMÓS AND H. MENA: *Fourier-Splitting method for solving hyperbolic LQR problems*, Numerical Algebra, Control and Optimization, Vol. **8**, pp. 17-46 (2018). DOI: [10.3934/naco.2018002](https://doi.org/10.3934/naco.2018002)
2. P. CSOMÓS AND J. WINCKLER: *A semigroup proof for the well-posedness of the linearised shallow water equations*, Analysis Mathematica, Vol. **43**, pp. 445-459 (2017). DOI: [10.1007/s10476-017-0204-7](https://doi.org/10.1007/s10476-017-0204-7)
3. P. CSOMÓS AND H. MENA: *Innovative integrators for computing the optimal state in LQR problems*, In: I. Dimov, I. Faragó, L. Vulkov (eds) Numerical Analysis and Its Applications. NAA 2016. Lecture Notes in Computer Science, Vol. **10187**, Springer, pp. 269-276 (2017). DOI: [10.1007/978-3-319-57099-0\\_28](https://doi.org/10.1007/978-3-319-57099-0_28)

## 2.4. Numerikus analízisbeli stabilitási és konvergencia kérdések

A (parciális) differenciálegyenletek numerikus megoldó módszereinek alapvetően elvárt tulajdonságai a stabilitás és a konvergencia. Csomós Petra egy összegző dolgozatban bemutatta azokat a tételeket és módszereket, melyek segítségével a funkcionálanalízis egyik területe, az operátorfélcsoport-elmélet a numerikus módszerek konvergenciájának bizonyítására alkalmazható. Fenti eredményeinek nagy részét éppen ezen technikák segítségével érte el. A stabilitással mind nemlineáris evolúciós egyenletek, mind pedig lineáris egyenletek esetén foglalkozott. Utóbbival kapcsolatos eredményeit a késleltetést tartalmazó egyenletekre alkalmazott operátor-szeletelési eljárások vizsgálatára is felhasználta.

1. P. CSOMÓS, I. FARAGÓ AND I. FEKETE: *Numerical stability for nonlinear evolution equations*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. **70**, pp. 2752-2761 (2015). DOI: [10.1016/j.camwa.2015.05.023](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.05.023)
2. P. CSOMÓS, I. FARAGÓ AND I. FEKETE: *Operator semigroups for convergence analysis*, In: I. Dimov, I. Faragó (eds) Finite Difference Methods, Theory and Applications. FDM 2014. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Vol. **9045**, pp. 38-49 (2015). DOI: [10.1007/978-3-319-20239-6\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-20239-6_4)
3. A. BÁTKEI, P. CSOMÓS, K.-J. AND ENGEL B. FARKAS: *Stability for Lie–Trotter products for some operator matrix semigroups*, In: P. Steinmann, G. Leugering (eds) PAMM Special Issue: 85th GAMM Annual Meeting, Wiley-VCH Verlag, pp. 985-998 (2014). DOI: [10.1002/pamm.201410478](https://doi.org/10.1002/pamm.201410478)
4. A. BÁTKEI, P. CSOMÓS, K.-J. AND ENGEL, B. FARKAS: *Stability and convergence of product formulas for operator matrices*, Integral Equations and Operator Theory, Vol. **74**, pp. 281-299 (2012). DOI: [10.1007/s00020-012-1994-4](https://doi.org/10.1007/s00020-012-1994-4)

## 2.5. Fizikai alkalmazások

Csomós Petra kutatómunkája számos alkalmazási problémával is foglalkozott. Összegzőnek szánt dolgozatában betekintést nyújtott a meteorológiai előrejelzések során alkalmazott adatasszimilációs módszerek levezetésébe. Az Ensemble Transform Kálmán Filter adatasszimilációs eljárás kifejlesztésével és eredményeivel külön dolgozatokban is foglalkozott. Egy bolygókeletkezést leíró és egy galaktikus transzport modellben is a fent vizsgált szekvenciális operátor-szeletelési eljárást alkalmazta.

1. Á. BODÓ AND P. CSOMÓS: *An invitation to meteorological data assimilation*, Mathematical Problems in Meteorological Modelling, Springer Series Mathematics in Industry, pp. 165-192 (2016). DOI: [10.1007/978-3-319-40157-7\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-40157-7_9)
2. Zs. REGÁLY, Zs. SÁNDOR, P. CSOMÓS AND S. ATAIEE: *Trapping of giant-planet cores - I. Vortex aided trapping at the outer dead zone edge*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. **433**, pp. 2626-2646 (2013). DOI: [10.1093/mnras/stt936](https://doi.org/10.1093/mnras/stt936)
3. P. CSOMÓS AND A. OSTERMANN: *Exponential integrators for (a very few) hyperbolic problems*, Oberwolfach Reports, Vol. **14**, pp. 20-21 (2014). DOI: [10.4171/OWR/2014/14](https://doi.org/10.4171/OWR/2014/14)
4. R. KISSMANN, M. WERNER, K. EGBERTS, O. REIMER, P. CSOMÓS AND A. OSTERMANN: *Physics and parameters in Galactic CR transport models*, High Energy Gamma-ray Astronomy: 5th International Meeting on High Energy Gamma-Ray Astronomy, AIP Conference Proceedings, Vol. **1505**, pp. 450-453 (2012). DOI: [10.1063/1.4772294](https://doi.org/10.1063/1.4772294)
5. E. ADAMCSEK, G. BÖLÖNI, P. CSOMÓS AND A. HORÁNYI: *The application of the Ensemble Transform Kalman Filter technique at the Hungarian Meteorological Service: preliminary results*, Időjárás, Quarterly Journal of the Hungarian Meteorological Service, Vol. **114**, pp. 21-37 (2010). [www.met.hu/en/ismeret-tar/kiadvanyok/idojaras/index.php?id=106](http://www.met.hu/en/ismeret-tar/kiadvanyok/idojaras/index.php?id=106)
6. P. CSOMÓS AND G. BÖLÖNI: *First steps towards the application of the Ensemble Transform Kalman Filter technique at the Hungarian Meteorological Service*, HIRLAM Newsletter, Vol. **54**, pp. 9-19 (2008). URL: [hirlam.org/index.php/hirlam-documentation/doc\\_download/127-hirlam-newsletter-no-54-paper-02-csomos](http://hirlam.org/index.php/hirlam-documentation/doc_download/127-hirlam-newsletter-no-54-paper-02-csomos)

## 2.6. Járványterjedési modellek

Csomós Petra sikeresen bekapcsolódott a kutatócsoport egy másik témájába is, a járványterjedés matematikai és numerikus modellezésébe. (Ennek aktualitását nyilvánvalóan nem szükséges hangsúlyozni.) Az általa korábban vizsgált elmélet segítségével fontos eredményeket ért el a modellek elméleti vizsgálatában, illetve a térbeli terjedést leíró integro- differenciálegyenletek numerikus modellezésben.

1. P. CSOMÓS: *Magnus-type integrator for semilinear delay equations with an application to epidemic models*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. **363**, pp. 92-105 (2020). DOI: [10.1016/j.cam.2019.05.031](https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.05.031)
2. P. CSOMÓS, B. TAKÁCS: *Operator splitting for space-dependent epidemic model*, bírálat alatt

### 3. Nemzetközi hatása

Csomós Petra 31 angol nyelvű publikációval rendelkezik, melyek referált nemzetközi (17) és hazai folyóiratokban (2), referált konferencia-kiadványokban (10) vagy könyvfejezetként (2) jelentek meg, valamint egy könyv szerkesztésében is részt vett. Tudományos közleményeire az MTMT adatbázisa szerint 89 független hivatkozás történt (Web-of-Science: 98, Scopus: 132).

Számos előadást tartott (több esetben meghívott előadóként) külföldi konferenciákon és vezető külföldi egyetemeken, ezen kívül több hazai és külföldi workshop szervezésében is közreműködött. Emellett jelentős bírálói tevékenységet végez rangos folyóiratok számára.

2019-től a European Cooperation in Science and Technology (COST) szervezet Mathematical models for interacting dynamics on networks elnevezésű kutatási együttműködésében a Numerical methods and applications munkacsoport helyettes vezetője.

### 4. Tudománynépszerűsítő tevékenysége

Csomós Petra idegen nyelvű publikációs tevékenysége mellett kiemelendő a hazai tudománynépszerűsítésben való aktív részvétele. Több alkalommal tartott előadást a Kutatók Éjszakája rendezvényén, amelyen saját szűkebb kutatási területét a középiskolai diákok számára mutatta be. Az előadások anyagából a Természet Világa folyóiratban közölt cikket.

### 5. Összegzés

Csomós Petra az alkalmazott matematika igazi szakembere. Három szakterületen szerzett végzettségét (matematika, meteorológia, csillagászat) sikeresen ötvözi kutatásaiban. Publikációs tevékenysége és annak visszhangja együttesen azt mutatják, hogy nemzetközileg is elismert kutatóvá vált.

Komjáth Péter, Krisztin Tibor és Simon Péter felterjesztők

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2020. ÉVI DÍJAZOTTJA:  
BEREND GÁBOR



Berend Gábor 1986-ban született Szegeden. MSc diplomáját közgazdasági programozó matematikus szakon szerezte a Szegedi Tudományegyetemen 2009-ben. Doktori disszertációját ugyanitt, az egyetem Informatika Doktori Iskolájában védte meg 2014-ben. Jelenleg a Szegedi Tudományegyetem Informatikai Intézetén belül a Számítógépes Algoritmusok és Mesterséges Intelligencia Tanszék adjunktusa.

Berend Gábor az elmúlt években kiemelkedő sikereket ért el a mesterséges intelligencián belül a természetesnyelv-feldolgozás kutatásának területén. Eredményeit a terület legkiemelkedőbb, rangos fórumain publikálta, mint amilyenek az AAAI Conference on Artificial Intelligence, International Conference on Learning Representations (ICLR) és Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP) konferenciák, vagy a Transactions of the Associations of Computational Linguistics c. folyóirat. Az ICLR és EMNLP konferenciákon egyszerűs cikket mutatott be.

Főbb kutatási eredményei a nyelvtéchnológiához, azon belül a különböző szövegegységekben (pl. szavakban) rejlő jelentéstartalmak reprezentálásához kapcsolódnak. Az általa kidolgozott ritka kódolást használó mátrixfelbontásokon alapuló algoritmusok olyan reprezentációk megalkotását teszik lehetővé, amelyek a korábban használt megoldásoknál hatékonyabbak, illetve az emberi kogníció sajátosságait is jobban tükrözik.

Az előbbieken vázolt jelentésreprezentációs megoldás olyan irányú kiterjesztését is megalkotta, amely a különböző nyelvű szövegekben a hasonló jelentésű szavakhoz hasonló reprezentációkat képes társítani. Mindez hasznos gyakorlati segítséget nyújthat az erőforrásokban szegény nyelvek feldolgozása során.

2019 óta a ProsperAMnet elnevezésű, az Interreg Central Europe program keretében megvalósuló EU projekt szakmai vezetője. A projekt célja egy gépi tanulási modellekkel támogatott döntéstámogató rendszer megalkotása a gyártástechnológiával foglalkozó cégek számára. Emellett a Multi3Generation: Multitask, Multilingual, Multi-modal Language Generation azonosítójú COST Action menedzsmentjének tagja 2019 óta.

Berend Gábor jelentős munkát végez a tehetséggondozás területén is, mint az „Integrált kutatói utánpótlás-képzési program az informatika és számítástudomány diszciplináris területein” című EFOP projekt mesterséges intelligencia fókuszú alprojektjének vezetője. Ezen túlmenően több TDK dolgozat témavezetője. Tudománynépszerűsítő tevékenységei között megemlíthető, hogy az elmúlt években rendszeresen részt vett az Informatikai Intézet nyílt napján, valamint a Kutatók Éjszakája programsorozatban.

A díjazott öt legfontosabb publikációja:

### Hivatkozások

- [1] GÁBOR BEREND: *Sparsity Makes Sense: Word Sense Disambiguation Using Sparse Contextualized Word Representations*, In the Proceedings of the 2020 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP). DOI: [10.18653/v1/2020.emnlp-main.683](https://doi.org/10.18653/v1/2020.emnlp-main.683)
- [2] GÁBOR BEREND: *Efficient algorithm to compute Markov transitional probabilities for a desired PageRank*, EPJ Data Science, Vol. **9**, No. **23**. DOI: [10.1140/epjds/s13688-020-00240-z](https://doi.org/10.1140/epjds/s13688-020-00240-z)
- [3] GÁBOR BEREND: *Massively Multilingual Sparse Word Representations*, Eighth International Conference on Learning Representations – ICLR 2020. URL: <https://openreview.net/pdf?id=HyeYTgrFPB>
- [4] VANDA BALOGH, GÁBOR BEREND, DIMITRIOS I. DIOCHNOS AND GYÖRGY TURÁN: *Understanding the semantic content of sparse word embeddings using a commonsense knowledge base*, Thirty-Fourth AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-20), Vol. **34** No. 5 (2020). DOI: [10.1609/aaai.v34i05.6235](https://doi.org/10.1609/aaai.v34i05.6235)
- [5] GÁBOR BEREND: *Sparse Coding of Neural Word Embeddings for Multilingual Sequence Labeling*, In Transactions of the Association for Computational Linguistics, Vol. **5**, pp. 247-261 (2017). DOI: [10.1162/tacL\\_a\\_00059](https://doi.org/10.1162/tacL_a_00059)

BEREND GÁBOR

Szegedi Tudományegyetem

TTIK, Informatikai Intézet

Számítógépes Algoritmusok és Mesterséges Intelligencia Tanszék

6720 Szeged, Árpád tér 2.

[berendg@inf.u-szeged.hu](mailto:berendg@inf.u-szeged.hu)

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2020. ÉVI DÍJAZOTTJA:  
FEKETE IMRE



Fekete Imre 1989-ben született Debrecenben. Diplomáját alkalmazott matematikus szakon szerezte meg 2012-ben az ELTE TTK-n kitüntetéses minősítéssel, egyben a „Kar Kiváló Hallgatója” elismerésben részesült.

Ezt követően – 2012 és 2015 között – az ELTE TTK Matematika Doktori Iskola ösztöndíjas hallgatója volt. Ebben az időszakban nemlineáris operátoregyenletek stabilitási koncepcióival és a stabilitáselmélet alkalmazásaival foglalkozott Faragó István témavezetésével. 2013-ban a XXXI. OTDK-n az Alkalmazott Matematika szekcióban megkapta a zsűri különdíját. 2015-ben pedig a Nemzeti Kiválóság Program keretében elnyerte a New Central Europe Young Researcher Scholarship ösztöndíját. Doktori értekezését 2015 őszén védte meg summa cum laude minősítéssel.

2015 júliusa és 2016 decembere között a King Abdullah University of Science and Technology (KAUST) Numerical Mathematics Group vendég PhD hallgatója, majd posztdoktora. David Ketcheson témavezetésével parciális differenciálegyenletek időbeli fejlődésével összefüggő, az ún. erős stabilitást megőrző numerikus módszerek fejlesztésével foglalkozott, ld.

<https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/7498>.

2016-tól kezdődően az ELTE Matematikai Intézet Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszékének tudományos munkatársa, majd 2019-től adjunktusa. Ezzel párhuzamosan 2017 óta az MTA-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoport (NUMNET) tudományos munkatársa.

2017-ben az Új Nemzeti Kiválóság Program Fiatal Kutatói ösztöndíjában, majd 2019-ben Magyar Állami Eötvös Ösztöndíjban részesült.

Fekete Imre 2016-ban történt hazatérése után kutatásának középpontjában parciális differenciálegyenletek megoldásának időbeli, adaptív diszkretizációs módszerei és azok alkalmazásai állnak. Érdekes, több területet érintő kérdéskör az adaptív numerikus módszerek és a zártkörű lineáris rendszerek kapcsolatának vizsgálata, ld. [1]. Társzerzőkkel elért, adaptív, erős stabilitást megőrző Runge-Kutta módszerekre vonatkozó eredményüket az amerikai Sandia National Laboratories, valamint két Python közönséges differenciálegyenlet megoldó csomag is használja. Adaptív, lineáris többlépéses módszereire vonatkozó eredményüket pedig a svéd COMSOL szimulációs szoftverbe is beépítették. Meghívott előadó volt 2017-ben a SciCADE (Scientific Computing and Differential Equations) nemzetközi konferencián. Kiemelkedő szerepe volt a 2018-ban Budapesten megrendezésre került ECMI 2018 (European Conference on Mathematics in Industry) konferencia szervezésében.

Tudományos munkái rangos nemzetközi folyóiratokban jelennek meg. 2018-ban a Journal of Computational and Applied Mathematics folyóirat vendégszerkesztője, 2020-ban pedig a Workshop on Stability and Discretization Issues in Differential Equations (ld. <http://sdide2020.elte.hu/>) konferenciasorozat aktuális rendezvényének elnöke.

A díjazott öt legfontosabb publikációja:

### Hivatkozások

- [1] C. ARÉVALO, G. SÖDERLIND, Y. HAJDIMICHAEL AND I. FEKETE: *Local error estimation and step size control in adaptive linear multistep methods*, Numerical Algorithms, megjelenés alatt (2020). DOI: [10.1007/s11075-020-00900-1](https://doi.org/10.1007/s11075-020-00900-1)
- [2] G. SÖDERLIND, I. FEKETE AND I. FARAGÓ: *On the zero-stability of multistep methods on smooth nonuniform grids*, BIT Numerical Mathematics, Vol. **58** No. **4**, pp. 1125-1143 (2018). DOI: [10.1007/s10543-018-0716-y](https://doi.org/10.1007/s10543-018-0716-y)
- [3] I. FEKETE, D. KETCHESON AND L. LÓCZI: *Positivity for convective semi-discretizations*, J. Sci. Comp., Vol. **74** No. **1**, pp. 244-266 (2018). DOI: [10.1007/s10915-017-0432-9](https://doi.org/10.1007/s10915-017-0432-9)
- [4] P. CSOMÓS, I. FARAGÓ AND I. FEKETE: *Numerical stability for nonlinear evolution equations*, Comput. Math. Appl., Vol. **70** No. **11**, pp. 2752-2761 (2015). DOI: [10.1016/j.camwa.2015.05.023](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.05.023)
- [5] I. FEKETE AND I. FARAGÓ: *Stability concepts and their applications*, Comput. Math. Appl., Vol. **67** No. **12**, pp. 2158-2170 (2014) DOI: [10.1016/j.camwa.2014.02.024](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2014.02.024)

FEKETE IMRE

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C

feipaat@cs.elte.hu



A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2020. ÉVI DÍJAZOTTJA:  
MOLONTAY ROLAND



Molontay Roland 1991-ben született Budapesten. A Városmajori Gimnáziumban tett kitűnő érettségit, majd a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen folytatta tanulmányait, ahol 2015-ben kitüntetéses alkalmazott matematikusi diplomát szerzett. Doktori tanulmányait szintén a Műegyetemen folytatta hálózatalméleti témában Simon Károly témavezetésével.

Kiterjedt témavezetői és oktatásszervezési tevékenységet végez, számos BSc és MSc dolgozat, négy I. díjas és három II. díjas intézményi TDK, illetve két I. díjas OTDK dolgozat témavezetője volt. A BME matematika alapszak adattudományi sávjának koordinátora, a Bevezetés az adattudományba 1 tárgy kidolgozója és népszerű oktatója. A matematika és a matematikus képzések elkötelezett népszerűsítője, a Kutatók Éjszakája, nyílt napok és szakkollégiumok rendszeres előadója.

Molontay Roland kutatásai három fő irányba sorolhatók. Fontos kutatási tevékenysége a hálózatalmélet – és azon belül is elsősorban a fraktális hálózatok elmélete – köré összpontosul. Társszerzőivel közösen új hálózati dimenziófogalmat vezetett be [1], több cikke jelent meg társszerzői hálózatok elemzésével kapcsolatban, illetve hálózatok támadhatóságának modellezéséről is [2].

Jelentős részt képeznek kutatásaiban az oktatási adattudományhoz kapcsolódó kutatások is, mely témában szintén több jelentős közleménye jelent meg többségében hallgatóival közösen [3, 4]. Molontay Roland fontos iskolateremtő tevékenységet is végez, az általa alapított Human and Social Data Science Lab kutatócsoport munkájába több fiatal kolléga és rengeteg MSc hallgató kapcsolódott be az évek során.

Kutatásainak harmadik pillérét az ipari partnerekkel közösen végzett kutató-fejlesztő munka jelenti. Kutatási-fejlesztési eredményei nemcsak több publikációt eredményeztek [5], de közülük több járta végig az innovációs láncot, és épült be a megbízó cég valós gyakorlatába. 2015 óta ő irányítja a BME Sztochasztika Tanszéken nagy sikerrel futó NOKIA Bell Labsszal közös kutatás-fejlesztési projekteket, illetve ő a tanszék vállalati kapcsolatokért felelős koordinátora, mely minőségében több ipari megbízást vonzott a tanszékre.

Molontay Roland 26 tudományos közlemény (ebből 7 Q1/D1 folyóiratcikk) szerzője, neves nemzetközi konferenciák rendszeres előadója. 2018-ban a BME Sztochasztika Tanszék magas színvonalú oktatói-kutatói munkájáért Innovációs Díjjal tüntette ki, 2019-ben pedig a hallgatók javaslata alapján a BME TTK Kari Tanácsa a Kar Kiváló Oktatója kitüntetéssel jutalmazta. Sikeres tehetséggondozói és TDK témavezetői munkásságáért 2019-ben a Pro Progressio TDK Oktatói Különdíjat is kiérdemelte. 2019-ben elnyerte az Új Nemzeti Kiválóság Program ösztöndíját, majd 2020-ban a Magyar Állami Eötvös Ösztöndíjat. Társ szerzőkkel közösen fejlesztett anomáliadetektáló eljárásukért 2020-ban a Pro Progressio Alapítvány Innovációs Díjával jutalmazták. Jelenleg az MTA-BME Sztochasztika Kutatócsoport munkatársa, a Human and Social Data Science Lab vezető kutatója, a BME Sztochasztika Tanszék, a BME Menedzsment és Vállalatgazdaságtan Tanszék és az Aquincum Institute of Technology oktatója, a HU-MATHS-IN – Magyar Ipari és Innovációs Matematikai Szolgáltató Hálózat tagja.

A díjazott öt legfontosabb publikációja:

### Hivatkozások

- [1] KOMJÁTHY, J., MOLONTAY, R. & SIMON, K.: *Transfinite fractal dimension of trees and hierarchical scale-free graphs*, Journal of Complex Networks, Vol. **7** No. **5**, pp. 764-791 (2019). DOI: [10.1093/comnet/cnz005](https://doi.org/10.1093/comnet/cnz005)
- [2] BARABÁS, B., FÜLÖP, O., MOLONTAY, R. & PÁLYI, G.: *Impact of the Discovery of Fluorous Biphasic Systems on Chemistry: A Statistical and Network Analysis*, ACS Sustainable Chemistry & Engineering, Vol. **5** No. **9**, pp. 8108-8118 (2017). DOI: [10.1021/acssuschemeng.7b01722](https://doi.org/10.1021/acssuschemeng.7b01722)
- [3] BEREZVAI, Z., LUKÁTS, G.D. & MOLONTAY, R.: *Can Professors Buy Better Evaluation with Lenient Grading? – The Effect of Grade Inflation on Student Evaluation of Teaching, Assessment & Evaluation in Higher Education* (2020). DOI: [10.1080/02602938.2020.1821866](https://doi.org/10.1080/02602938.2020.1821866)
- [4] MOLONTAY, R., HORVÁTH, N., BERGMANN, J., SZEKRÉNYES, D. & SZABÓ, M.: *Characterizing Curriculum Prerequisite Networks by a Student Flow Approach*, IEEE Transactions on Learning Technologies, Vol. **13** No. **3**, pp. 491-501 (2020). DOI: [10.1109/TLT.2020.2981331](https://doi.org/10.1109/TLT.2020.2981331)
- [5] HORVÁTH, G., KOVÁCS, E., MOLONTAY, R. & NOVÁ CZKI, S.: *Copula-Based Anomaly Scoring of High-Dimensional Data with Application in Telecommunication Networks*, ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology, Vol. **11** No. **3**, Article 26 (2020). DOI: [10.1145/3372274](https://doi.org/10.1145/3372274)

MOLONTAY ROLAND

MTA-BME Sztochasztika Kutatócsoport és  
BME Sztochasztika Tanszék  
1111 Budapest  
Egry József utca 1.  
H épület 5. emelet  
molontayr@gmail.com

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2020. ÉVI DÍJAZOTTJA:  
RIGÓ PETRA RENÁTA



Rigó Petra Renáta (születési neve: Takács Petra-Renáta), 1992-ben született Kolozsváron. BSc és MSc tanulmányait a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karán végezte, ahol 2014-ben matematika BSc, 2016-ban számítógépes matematika MSc diplomát szerzett. 2016 szeptembere és 2020 augusztusa között a BME Matematika és Számítástudományi Doktori Iskola ösztöndíjasa, témavezetője Illés Tibor volt. PhD értekezését 2020 júniusában *summa cum laude* minősítéssel védte meg. 2020 szeptembere óta a Corvinus Operációkutatási Kutatóközpont kutatója. A BCE-n és a BME-n operációkutatási tárgyakat oktat magyarul és angolul.

Nemzetközileg is jelentős eredményeket publikált a belsőpontos algoritmusok elmélete, fejlesztése és számítógépes tesztelése területén. Társszerzőivel több feladatosztályra - úgymint lineáris optimalizálási feladat, lineáris komplementaritási feladat (LCP), ill. szimmetrikus optimalizálási feladat – a centrális út egyenleteinek algebrailag ekvivalens átalakítására támaszkodva új típusú belsőpontos algoritmusokat dolgozott ki, amelyek mindegyike az adott feladatosztályon belül az ismert legjobb komplexitású. Az utóbbi időben elégséges lineáris komplementaritási feladatok prediktor-korrektor algoritmusainak fejlesztésével, továbbá centrális út újszerű leírásával foglalkozik, amely kedvezően befolyásolja új Newton-irányok előállítását. Cikkeiben az implementált algoritmusok részletes leírása is megjelenik, ami a szakirodalomban egy új irányzat kezdeményezését is jelenti. Munkássága szerves folytatása és értékes kiegészítése a belsőpontos algoritmusok témaköréhez kapcsolódó, magyar vonatkozású, iskolateremtő hagyománynak, amelyet Sonnevend György, Klafszky Emil, Terlaky Tamás, Illés Tibor, Mészáros Csaba és Darvay Zsolt több évtizeden átívelő munkái alapoztak meg.

Rigó Petra Renáta tudományos közleményeinek száma 26, amelyek közül 10 angol nyelvű nemzetközi folyóiratban jelent meg, közöttük olyan jelentős, Q1-es minősítésű folyóiratban, mint a SIAM Journal on Optimization, Computational Optimization and Applications, Optimization Methods and Software, Optimization Letters. Eredményeit több mint 10 nemzetközi konferencián mutatta be.

Egyetemi előadásaival komoly hatást gyakorolt tanítványaira, többek között Szénási Eszter is az ő vezetésével készítette el a diplomamunkáját. A diplomamunkában elért új operációkutatási eredmények bemutatására Szegeden, a Magyar Operációkutatási Konferencián került sor 2019-ben.

Számos kutatási projekt (NKFIH 125700, 2017-2020, Magyarország; CNCS – UEFISCDI, project number PN-III-P4-ID-PCE-2016-0190, within PNCDI III, 2017-2019, Románia; „Future Mobility”, BME FIKP-MI/FM, 2018-2019 aktív résztvevője volt. Ezen túlmenően két ÚNKP pályázatot is nyert. Itt csak a *Tehetséggel fel!* Felsőoktatást Megkezdő Kutatói Ösztöndíj, (ÚNKP-20-6), *Lineáris programozás és alkalmazásai* című pályázatot emeljük ki, amelyet Hermán Judit elsőéves matematika alapszakos hallgatóval nyertek el. Elhivatott oktatóként és témavezetőként foglalkozik tanítványaival, bevezetve őket a matematikai optimalizálás világába, illetve bemutatva az elmélyült tanulás és kutatás szépségét.

A díjazott öt legfontosabb publikációja:

### Hivatkozások

- [1] Zs. DARVAY, T. ILLÉS, J. POVH AND P.R. RIGÓ: *Predictor-corrector interior-point algorithm for sufficient linear complementarity problems based on a new search direction*, SIAM Journal on Optimization, Vol. **30** No. **3** pp. 2628-2658 (2020). DOI: [10.1137/19M1248972](https://doi.org/10.1137/19M1248972)
- [2] S. ASADI, N. MAHDAVI-AMIRI, Zs. DARVAY AND P.R. RIGÓ: *Full-Nestrov-Todd step feasible interior-point algorithm for symmetric cone horizontal linear complementarity problem based on a positive-asymptotic barrier function*, Optimization Methods and Software, (2020). DOI: [10.1080/10556788.2020.1734803](https://doi.org/10.1080/10556788.2020.1734803)
- [3] Zs. DARVAY, B. KHEIRFAM AND P.R. RIGÓ: *A new wide neighborhood primal-dual second-order corrector algorithm for linear optimization*, Optimization Letters, Vol. **14**, pp. 1747-1763 (2020). DOI: [10.1007/s11590-019-01468-z](https://doi.org/10.1007/s11590-019-01468-z)
- [4] Zs. DARVAY, T. ILLÉS, B. KHEIRFAM AND P.R. RIGÓ: *A corrector-predictor interior-point method with new search direction for linear optimization*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **28**, pp. 1123-1140 (2020). DOI: [10.1007/s10100-019-00622-3](https://doi.org/10.1007/s10100-019-00622-3)
- [5] P.R. RIGÓ AND Zs. DARVAY: *Infeasible interior-point method for symmetric optimization using a positive-asymptotic barrier*, Computational Optimization and Applications, Vol. **71** No. **2**, pp. 483-508 (2018). DOI: [10.1007/s10589-018-0012-4](https://doi.org/10.1007/s10589-018-0012-4)

RIGÓ PETRA RENÁTA

Budapesti Corvinus Egyetem  
Corvinus Operációkutatási Kutatóközpont  
1093 Budapest, Fővám tér 8., E épület  
petra.rigo@uni-corvinus.hu

## PÁROS ÖSSZEHAISONLÍTÁSOK A DÖNTÉSHOZATALBAN

TEMESI JÓZSEF

A döntéshozatali alkalmazások egyik kiemelt területe a többtényezős döntéshozatal. Ebben a modellben véges sok alternatívát véges sok tényező szerint értékelve egy döntési mátrix elemzése, az esetek többségében egy alternatíva rangsor felállítása, vagy a legjobb alternatíva megtalálása a feladat. Ez a tanulmány – a szerző kutatásainak tükrében – a döntési mátrix előállításának egyik népszerű technikájával, a páros összehasonlítások módszerével foglalkozik. A rövid cikk keretében a speciális döntési probléma tulajdonságainak bemutatását követően az alkalmazás feltételeinek megvilágítása a cél, azt hangsúlyozva, hogy valós döntési feladatok megoldásakor és az eredmények értelmezésekor a páros összehasonlítások módszerének előnyeit és hátrányait egyaránt figyelembe kell venni, és ajánlatos a döntéshozó bevonása a megoldási folyamatba.

### 1. Bevezetés

A 2019-ben Szegeden rendezett XXXIII. Magyar Operációkutatási Konferencián ért az a nagy megtiszteltetés, hogy a Magyar Operációkutatási Társaság (MOT) Egerváry Jenő emlékplakettjét átvehettem. Ez a rövid cikk a díjazottak számára indított sorozatban az *Alkalmazott Matematikai Lapok* felkérésére készült és pályám néhány jellemző vonásáról, illetve döntéshozatali kutatásaim egyik fontos eszközéről, a páros összehasonlítási mátrixokról szól. Engedtessek meg, hogy eközben ennek a folyóiratnak a nevében szereplő első jelzőre koncentráljak.

A díj apropóját felhasználva előljáróban mindenképpen el kell mondanom, hogy a MOT az elmúlt 30 évben számomra kiemelkedően fontos hazai szakmai terepet jelentett és sok kiváló kollégával dolgozhattam együtt, akik nem csak a társaságban, hanem az MTA Operációkutatási Bizottságában is sikeresen képviselik az operációkutatást. Különösen emlékezetes számomra az évszázad első évtizede, amely a nagy sikerű budapesti EURO 2000 konferenciával indult, és amikor a továbbiakban elnökségi tagként, majd a MOT elnökeként tevékenykedhettem.

## 2. Pályámról röviden

Az akkor még Marx Károly nevét viselő Közgazdaságtudományi Egyetemen végeztem 1974-ben, a terv-matematika szak utódként létrejött népgazdasági tervezés szak gazdaságmatematikai szakágazatán. Sok kiváló tanár tanította a matematika közgazdasági alkalmazásai iránt érdeklődő csoportot, sajnos közülük Bod Péter, Krekó Béla, Szép Jenő, Ziermann Margit már nincs az élők sorában.

Az 1968-ban elindított úgynevezett új gazdasági mechanizmus egyik következménye az volt, hogy megnőtt az érdeklődés a makrogazdasági döntésekben felhasználható matematikai eszközök iránt. A gazdasági tervezésben a matematikai programozás kiemelt szerepet kapott, elméleti és gyakorlati szakemberek kezdtek el foglalkozni elsősorban a lineáris programozási modellel, s mind a Tervhivatalban, mind az egyetemeken megjelentek az ezeket a modelleket oktató tantárgyak. Virágzó korszaka volt ez az időszak az operációkutatási modellezésnek: szakkönyvek, tudományos cikkek fémjelezték azt a vonulatot, amelyben a magyar operációkutatók is nemzetközileg elismert eredményeket tudtak felmutatni. Ez a háttér vonzott engem is a matematikailag izgalmas, számítástechnikailag robbanásszerűen fejlődő, hasznos alkalmazásokkal kecsegtető terület felé.

Halpern Lászlóval, csoporttársammal, izgalmasnak találtuk az árnyékárak elemzését, ebből a témából írtunk díjnyertes TDK-dolgozatot. Varga József volt a Közgázson az akkori Matematikai Tanszéken az LP-modellek egyik szakavatott alkalmazója, ő volt a témavezetője ezen modellek népgazdasági tervezésbeli alkalmazásáról szóló szakdolgozatomnak. Végzés után a tanszékre kerülve folytattam a gyakorlati munkákat (a valós problémák megoldásának igénye végigkísérte további pályámat), majd Gáspár Lászlóval azt a „piaci részt” találtuk meg, amelyet a didaktikus, példákkal dúsan ellátott, ugyanakkor matematikailag precíz tárgyalású egyetemi tankönyvek jelentettek: így születtek meg a Lineáris programozási és Matematikai programozási gyakorlatok című könyvek az 1980-as évek második felében [12], [13] - ezek a könyvek még ma is népszerűek az egyetemi oktatásban. (Hasonlóképpen, a Varró Zoltánnal 2007-ben írt Operációkutatás könyvünk [22] is főleg az egyetemi oktatás céljait tartja szem előtt.) Az 1970-es évek végén, az 1980-as évek elején - miközben ma már elképzelhetetlenül sok ágazati és vállalati alkalmazási feladatban szerezhettem tapasztalatot a gyakorlati feladatok megoldásának szépségeit és buktatóit illetően - egyre inkább a döntéelmélet vált szűkebb szakterületemmé, azon belül is a többcélú döntések módszertana.

A rendszerváltás utáni mintegy 15 évben párhuzamosan futott egyetemi vezetői és szakmai életutam. A sokféle néven működő Közgazdaságtudományi Egyetem dékánjaként, rektorhelyetteseként oktatási és tudományos ügyekkel foglalkoztam. Fontos vívmánynak tartom, hogy eközben - Zalai Ernővel, Forgó Ferencsel, Rapcsák Tamással és más kiváló kollégákkal együtt sikerült megőrizni, sőt, a 2000-es évek elején újraéleszteni tárgyakat és szakokat az igényes matematikai közgazdaságtani, operációkutatási képzések vonalán. 2000-től 2014-ig tanszékvezetőként is igyekeztem ezeket védeni, fejleszteni.

Jelentősebb hazai és külföldi publikációim először az operációkutatási alkalmazások területén jelentek meg. Tudom, hogy a tudományos közvélemény ambivalensen viszonyul a társszerzős művekhez, én azonban kimondottan hasznosnak tartottam a közös munkát és büszke vagyok arra, hogy Forgó Ferencsel, Stahl Jánossal, Pór Andrással, Rapcsák Tamással, Fülöp Jánossal dolgoztam együtt és publikáltuk eredményeinket [10], [15], [14], [11]. 2002-ben, a döntéselméleti kurzusaim számára kidolgozott tananyag szakkönyvként is megjelent [18], és a szakma által elismert nemzetközi folyóiratokban publikált egyes döntéselméleti témájú cikkeket már olyan tanítványaimmal közösen írtuk (pl. [1], [2]), akik ebből a könyvből ismerték meg az alapfogalmakat. Bozóki Sándor és Csató László az utóbbi években már egyenrangú kutatóként, szakmai díjak birtokosaként önálló, eredményes tudományos pályát futnak be. Legutóbbi OTKA kutatásunk esetében Bozóki Sándor átvette tőlem a kutatásvezetői pozíciót is, eredményei nagyszámú hivatkozást generálnak. Csató László a közösen írt sport témájú cikk mellett számos alkalmazási és elméleti cikkel vesz részt a közös munkában.

Talán az eddigiekből is látható, hogy számomra a tudományos munka nem magányos elmélkedést, hanem együttműködést, műhelymunkát jelent. Így nem véletlen, hogy a szakmai társaságokban is aktív szerepet vállaltam és a MOT-on kívül a Gazdaságmodellezési Társaságnak is voltam elnökségi tagja és elnöke. Külön örülök annak, hogy a Rapcsák Tamás-díj kuratóriumának tagjaként szerepem lehet abban, hogy a névadóhoz méltó kollégák nyerjék el ezt a kitüntetést. Nemzetközi szerepléseim elsősorban a nemzetközi operációkutatási társaságok és az MCDM (Multi-Criteria Decision Making) Society, a Decision Science Institute és az International Society of Analytic Hierarchy Process konferenciáihoz kötődnek. Fulbright-ösztöndíjasként a New Hampshire University döntési tanszékén oktattam és kutattam.

### 3. Páros összehasonlításokról alkalmazói szemléletben

Kutatói pályám elején két olyan részterület ragadott meg, amelyek mindmáig hatással vannak tudományos munkámra és annak szemléletére. Nagyobb méretű, valós alkalmazások során a megbízókkal, azaz egy-egy döntési feladat gazdái-val való munka során legtöbbször az derült ki, hogy a matematikai programozási feladat keretrendszerében (feltételek és célfüggvény) megoldott optimalizálási probléma eredménye nehezen vezethető be a gyakorlatban – például egy termelési feladatban túlságosan kevés termék kapott pozitív értéket vagy kapacitáskihasználatlanságok keletkeztek. Modellezési ügyeskedéssel ez ugyan elkerülhetővé vált, de az így bővülő feltételi rendszerben az eredmény túlságosan „irányítottá” válhatott, vagy akár az is könnyen előfordulhatott, hogy nincs megengedett megoldás. Életszerűbb szemléletet jelentett, ha a közgazdaságtan egyik fontos fogalmát, a Pareto-optimalitást felhasználva nem egyetlen célfüggvény szerint keressük a legjobb megoldást. Ez egybevágott a gazdasági döntések elméleti konstrukcióiban

is tért hódító új irányzattal, miszerint a gazdasági szereplőket nem egyetlen cél (pl. a profitmaximalizálás) vezérli, hanem egymással versengő, ellentétes hatású célok együttesét kell kezelni. A vektormaximum-probléma (a kezdetekről lásd például Steuer könyvét [17]) hasznos modellezési eszköznek látszott mind a makroökonómiai modellezésben, mind a vállalati modellezésben:

$$(1) \quad \max \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X, \quad \text{ahol} \quad X \subseteq R^n, \quad \text{és} \quad f : X \rightarrow R^k$$

Az (1)-ben szereplő feladat megoldását azok az efficiensnek nevezett  $\mathbf{x}^* \in X$   $n$ -dimenziós pontok jelentik, amelyek esetében nem találunk olyan  $\mathbf{x} \in X$  vektort, amelyre  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ , és  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$  teljesül. Döntéshozói szemmel a  $Q = \mathbf{f}(X)$   $k$ -dimenziós kimeneti pontok azon  $\mathbf{q}^* \in Q$  nem-dominált (Pareto-optimális) vektorait keressük, amelyekhez nem található olyan  $\mathbf{q} \in Q$ , hogy  $\mathbf{q} \geq \mathbf{q}^*$  és  $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}^*$ . Valós alkalmazásokban sajnos a feladat megoldása nehezen tárható a döntéshozók elé, mert az efficiens pontok halmaza általában végtelen számosságú. Ha le tudjuk írni a hatékony felületet (ez még a lineáris esetben sem könnyű feladat, lásd Yu és Zeleny [24] cikkét), a döntéshozó továbbra is azzal a kérdéssel szembesül, hogyan lehet ezek közül választani. Sőt, választását még az is nehezíti, hogy a  $\mathbf{q}^*$  vektorok egymással nem összehasonlíthatók. A többcélú programozás egyes módszerei ezért nem is a teljes efficiens halmaz leírását célozzák meg, hanem azok közül egyetlen pont kiválasztására koncentrálnak: egy olyan pontra, amely egy elfogadható döntési elvet követve automatikusan juttat el a feladat megoldásához. E módszerek alapos összefoglalása található Ehrgott [9] könyvében. Ha például elfogadjuk azt az elvet, hogy az egyedi célfüggvények optimumához legközelebb eső efficiens pontot választjuk, akkor a kompromisszum-programozás alkalmazása automatikusan megadhatja a döntési feladatként tekintett programozási modell egyetlen (alkalmazandó) megoldását. Ez az „automatizmus” tehát kivezet a döntésképtelenséget jelentő végtelen sok optimális megoldás csapdájából, ám – s ez volt, ami engem érdekelt –, mégis egy külső (modellen kívüli) elemet hív ehhez segítségül: a döntési elvet. A végső megoldásba vetett hitünket tehát egy-egy ilyen feladtnál alássa az, hogy több, nem ugyanahhoz a Pareto-optimális ponthoz vezető döntési elv létezik – annyi történt tehát, hogy új feladatként a döntési elvek között kell választanunk.

Tegyük fel viszont, hogy valamilyen axiómarendszer elvezet bennünket oda, hogy a legjobb kompromisszum fentebb felvázolt megoldását tekintjük az egyetlen megfelelő döntési elvnek. Kimutatható, hogy ebben az esetben sem dőlhetünk hátra: most a távolság-fogalmak közül kell választanunk, hiszen például az ún. ideális ponthoz legközelebbi Pareto-optimális pont függ az alkalmazott távolság-fogalomtól [23]. Az én alkalmazói megközelitésem számára is csábító lehetett volna az, hogy valamelyik automatikus módszer mellett érveljek, ezzel előállítva a döntési feladat egyetlen megoldását, ám tapasztalatom szerint ennél megfelelőbb eljárás is található akkor, ha a döntéshozó a megoldás valamely fázisában (vagy végig) rendelkezésre áll: tőle kell azt a „külső információt” beszerezni, amelyik nélkül



a megoldás nem redukálható egyetlen Pareto-optimális pontra. Ehhez interaktív módszereket javasoltam, vagyis a döntéshozó bekapcsolását a megoldási folyamatba.

Az (1) vektormaximum probléma mellett figyelem arra a rokon feladatra irányult, amelyiket nem végtelen sok, hanem véges sok, egymással össze nem hasonlítható vektorként írhatunk le. A többtényezős döntési feladatok szokásos megfogalmazásában véges sok alternatíva közül kell választanunk véges sok tényező kvantitatív vagy kvalitatív értékelései alapján, ahol adott az, hogy egy-egy szempont esetében a nagyobb érték jobbat vagy kevésbé jobbat jelent. Legyenek a többtényezős döntési probléma kritériumai  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , az alternatívák pedig  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Az alternatívákat minden kritérium szerint páronként összehasonlítjuk egymással. Ezáltal a feladat lényegi része egy  $\mathbf{D}$  döntési mátrixként jeleníthető meg. Nyilvánvaló, hogy a  $\mathbf{D}$  mátrix tekinthető úgy is, mintha a vektormaximum-probléma Pareto-optimális pontjaiból véges sokat választottunk volna ki, azaz a döntési elvek megfelelően módosított változatai átvihetők lehetnek a többtényezős feladatra is. Valóban, például a kompromisszum-technika itt is alkalmazható, ha például ideális megoldásként az egyes tényezők legjobb értékeit választjuk. A többtényezős feladatra ettől eltérő, egyéb megoldás-koncepciók is megjelentek (ezekkel a [18] könyvemben részletesen foglalkoztam).

A véges feladat viszont az esetek többségében azért követel meg a folytonos esettől eltérő szemléletet, mert a vektorok éppen hogy nem állnak készen egy többcélú programozási feladat Pareto-optimális felületéről történő leválogatás után, hanem a tényezők szerinti értékelések előállítására is szerves része az eljárásnak. Mivel az ilyen típusú feladatoknál sűrűn előfordul, hogy az értékelések a döntéshozónak az alternatívákra vonatkozó preferenciáinak számszerű kifejezését jelentik az egyes tényezők szerint, megfelelő skálát választva ez az értékelés könnyen véghez vihető akár egyszerre, akár az alternatívák párojaira. Saaty javaslata volt az [16], hogy a páros összehasonlítás technikáját kell használni. Saaty úgy érvelt, hogy ha az értékelendő alternatívák száma aránylag nagy, akkor a direkt értékelés nehéz és a döntéseméleti irodalomban tárgyalt szisztematikus torzítások megjelenésének veszélyét hordozza magában. Arányskála alkalmazása esetében viszont a páronkénti összehasonlítások a döntéshozó számára egyszerűek és könnyen átgondolhatók (hányszor jobb az egyik alternatíva a másiknál az adott szempont szerint?).

Az  $\mathbf{A}_m$  páros összehasonlítási mátrix  $a_{ijm}$  eleme jelentse az  $i$ -edik és a  $j$ -edik alternatíva összehasonlításának eredményét az  $m$ -edik kritérium szerint ( $m = 1, \dots, k$ ). Elhagyva a kritérium szerinti indexet, koncentráljunk a döntéshozó által megadott valamely  $\mathbf{A}$  mátrixra. Legyen a feladat a  $w_1, w_2, \dots, w_n$  implicit súlyok meghatározása az  $a_{ij}$  értékeinek segítségével, amelyeket a  $w_i/w_j$  hányadosok becsléseinek tekintünk. Ezek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

- (i)  $a_{ij} > 0$  és  $a_{ii} = 1$ ,  $(i, j = 1, \dots, n)$  pozitivitás,
- (ii)  $a_{ij} = 1/a_{ji}$ ,  $(i, j = 1, \dots, n)$  reciprocitás.

Ha ez a pozitív, reciprok mátrix még a

- (iii)  $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$   $(i, j, k = 1, \dots, n)$

tulajdonsággal is rendelkezik, akkor az  $\mathbf{A}$  mátrixot konzisztensnek nevezzük. Könnyen belátható, hogy a konzisztens esetben a  $\mathbf{w}$  vektor előállítása többféle egyszerű módon konstansból eltekintve egyértelműen elvégezhető, a konstans pedig abból kapható, hogy az elemek összege 1. Ez az ideális eset ritkán fordul elő, a valóságban ezek az értékek eltérnek a pontos preferencia-hányadosoktól. Saaty felismerése az volt, hogy a páros összehasonlítások mátrixából a valós preferenciák sajátvektor módszerrel jól becsülhetők.

Lassan negyven éve, hogy ez a módszer az alternatívák hierarchikus csoportosításával kiegészítve az Analytic Hierarchy Process (AHP) elnevezést kapta. Az alkalmazók körében rendkívül népszerű lett, viszont több pontban is viták lángoltak fel körülötte. Nem kívánok ezeknek a többfelé elágazó vitáknak a részleteibe belemenni (jó összefoglalást ad például Brunelli [7]). Érdemes azonban megemlíteni, hogy a felmerülő problémakörök tisztázásához az a kutatócsoport, amelyik több OTKA-kutatás keretében az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoportjában és a Corvinus Egyetem Operációkutatási Tanszékén dolgozott együtt, fontos eredményekkel járult hozzá. Az alapfeladatnál érdekes kérdés, hogy a becslés milyen módszerekkel végezhető el és ezeknek milyen tulajdonságai vannak. Az egyik legvitatottabb témakör a páros összehasonlítások technikájával készített mátrix inkonzisztenciája, azaz a (iii) tulajdonságtól való eltérés mértéke. A kutatócsoportban erre vonatkozóan publikált eredmények, például [5] és [6] magas idézettségűek. A nem teljes páros összehasonlítási mátrixokra kiterjesztett eredmények és alkalmazás új, eddig feltáratlan területekre vezette a kutatócsoport tagjait [4], [1]. Szépen köti össze a többcélú programozás és a többtényezős döntések világát az utóbbi megoldásainak efficiens voltáról szóló cikk [3].

A részletek taglalása és a megmaradt matematikai jellegű kihívások felsorolása helyett a továbbiakban inkább egy olyan témáról ejtenék szót, amelynek az alkalmazásokkal foglalkozó publikációknál tapasztalt háttérbe szorulása az utóbbi 10 évben több cikk megírására inspirált. Az operációkutatási modellek lényegéhez tartoznak azok a feltételek, amelyek működésüket és alkalmazásukat lehetővé teszik, ugyanakkor pedig korlátozzák is. A lineáris programozási modelleknél előfeltétel a változók folytonossága (ez az alkalmazásoknál végtelen oszthatóságot jelent), vagy a linearitás (például az erőforrások felhasználása és a célfüggvény szempontjából). Ha ezek nem teljesülnek, ám a modellt eredeti formájában alkalmazzuk, akkor az eredmények kétesek vagy nehezen magyarázhatók lesznek.

Egy alkalmazásnak implicit vagy explicit módon tartalmaznia kell a matematikai modellnek az adott problémára vonatkozó érvényességének igazolását, vagy az eredmények ismertetésekor ki kell térnie azokra az elhanyagolásokra, torzításokra, elvonatkoztatásokra, amelyek azok felhasználását árnyalják. Örök alkalmazói dilemma, hogy a modellezés révén kapott megoldás egy az egyben bevezethető-e (például egy szállítási feladatnál valószínűleg igen, ha nem hanyagoltunk el túl sok tényezőt), vagy csak orientáló jellegű (például egy tömegkiszolgálási modellnél csak a rendszer bővítését alapozza meg, de nem biztos, hogy éppen a modell számszerű eredményének megfelelően). Ha egy többtényezős döntési problémát tekintünk, fokozottan igaz az, hogy körültekintően kell eljárunk a legjobb megoldást illetően. Mint ebből a rövid gondolatmenetből valószínűleg az operációkutatással foglalkozó kollégák már régen rájöttek, a modellezés validálási szakaszáról beszélek - amelyet sajnálatosan elhanyagolva látok a publikációkban.

A többcélú optimalizálás módszertanával foglalkozva az egyik legfontosabb konklúzióm az volt, hogy a modellt döntési feladatként tekintve a döntéshozó által valóban felhasználható megoldás nem adható pótlólagos információk bevezetése nélkül. Ezek a többlet információk származhatnak közvetlenül a döntéshozótól, ha ő elérhető és bevonható a megoldási eljárásba, de felhasználhatunk magára a döntési feladatra vagy a döntéshozókra általában igaznak tekintett tulajdonságokat is, például axiomatikus vagy implementációs modellkeretben. Természetes volt, hogy a véges feladat esetében is megmaradtam ennél a gondolatmenetnél és a páros összehasonlítási mátrix előállítását interaktív eljárásként kívántam alkalmazni, lehetőleg úgy, hogy egyben a döntési feladat egyetlen megoldása is előálljon [19].

2011-ben megjelent cikkemben [20] a hivatkozások szerint sokak egyetértésével találkozok, míg mások szerint erős megkötést jelentő tulajdonság teljesülését állítottam a páros összehasonlítási eljárást alkalmazók elé, ez a hibamentességi (error-free) tulajdonság. Legegyszerűbben ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egy páros összehasonlításokat használó eljárás eredménye mindaddig nem tekinthető érvényesnek, míg a becslés alapjául szolgáló alaplátrixot a döntéshozó – az eljárás egészében részt véve, vagy csak az eljárás végén – nem validálta. Amennyiben nem rendelkezünk ilyen döntéshozói „jóváhagyással”, a mátrix elvileg nem tekinthető megbízhatónak. Ez a megközelítés különösen fontos azoknak a döntési feladatoknak a megoldásakor, amelyek az egyéni preferenciák kinyilvánítására építenek.

Mivel az AHP egyik lényegi vonása a döntéshozó konzekvens válaszai hiányának elismerése – ez a mátrix inkonzisztenciáját jelenti matematikai értelemben –, a szakirodalomban felértékelődtek az inkonzisztens mátrixok korrekcióját elvégző módszerek, s ezzel egyidejűleg magának az inkonzisztenciának a mérésére szolgáló indexek (Brunelli [8] részletes összefoglalását adja a jelenlegi helyzetnek). Ha azonban egy kiinduló mátrix még akkor is lehet hibás, nem megbízható, ha az inkonzisztens, akkor a korrekciós módszerek (is) csak akkor lehetnek értelmezésben megfelelőek, ha azok a döntéshozói validáción átesetek, vagy ez valamilyen kerülő

úton biztosítható volt. Ilyen irányban mutatott példát legutóbbi publikációm egy egyszerűbb esetben, amikor a páros összehasonlítási mátrix előállítása a döntéshozó jelenlétében, verbális skálán történik [21].

Kutatócsoportunkban, ahol kiváló matematikusok is dolgoznak a páros összehasonlítási módszertan nyitott kérdéseinek megoldásán, jómagam tehát az utóbbi időben a feladat (jelen esetben a véges többtényezős probléma) döntési oldalának tulajdonságaival, a megoldás érvényességének kérdéseivel foglalkoztam legtöbbit. Izgalmasnak találom azokat a modellezési kérdéseket, amelyek az alkalmazások publikálásakor és az eredmények interpretálásakor felmerülnek, s amelyek egy része a döntési feladat matematikailag egzakt megfogalmazásával és kezelésével együtt a döntéshozót is a megoldási folyamat részének tekinti. Természetesen ez nem minden döntési probléma esetében van így, ám éppen a többtényezős feladatoknál találhatók jellegzetes feladattípusok, ahol ez a kérdésfelvetés nem hárítható el. Remélem, hogy az Alkalmazott Matematikai Lapok olvasóinak sem idegen ez a megközelítés, ezért mertem ennek a rövid cikknek a témájául választani.

### Hivatkozások

- [1] BOZÓKI, S., CSATÓ, L. AND TEMESI, J.: *An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis players*, European Journal of Operational Research, Vol. **218** No. **1**, pp. 211-218 (2016). DOI: [10.1016/j.ejor.2015.06.069](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.06.069)
- [2] BOZÓKI, S., DEZSŐ, L., POESZ, A. AND TEMESI, J.: *Analysis of pairwise comparison matrices: an empirical research*, Annals of Operations Research, Vol. **211** No. **1**, pp. 511-528 (2013). DOI: [10.1007/s10479-013-1328-1](https://doi.org/10.1007/s10479-013-1328-1)
- [3] BOZÓKI, S. AND FÜLÖP, J.: *Efficient weight vectors from pairwise comparison matrices*, European Journal of Operational Research, Vol. **264** No. **2**, pp. 419-427 (2018). DOI: [10.1016/j.ejor.2017.06.033](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.06.033)
- [4] BOZÓKI, S., FÜLÖP, J. AND RÓNYAI, L.: *On optimal completions of incomplete pairwise comparison matrices*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. **52** No. **1-2**, pp. 318-333 (2010). DOI: [10.1016/j.mcm.2010.02.047](https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.02.047)
- [5] BOZÓKI, S., FÜLÖP, J. AND POESZ, A.: *On reducing inconsistency of pairwise comparison matrices below an acceptance threshold*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **23** No. **4**, pp. 849-866 (2015). DOI: [10.1007/s10100-014-0346-7](https://doi.org/10.1007/s10100-014-0346-7)
- [6] BOZÓKI S. AND RAPCSÁK T.: *On Saaty's and Koczkodaj's inconsistencies of pairwise comparison matrices*, Journal of Global Optimization, Vol. **42** No. **2**, pp. 157-175 (2008). DOI: [10.1007/s10898-007-9236-z](https://doi.org/10.1007/s10898-007-9236-z)
- [7] BRUNELLI, M.: *Introduction to the Analytic Hierarchy Process*, Springer (2015) DOI: [10.1007/978-3-319-12502-2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-12502-2)
- [8] BRUNELLI, M.: *A survey of inconsistency indices for pairwise comparisons*, International Journal of General Systems, Vol. **47** No. **8**, pp. 751-771 (2018). DOI: [10.1080/03081079.2018.1523156](https://doi.org/10.1080/03081079.2018.1523156)

- [9] EHROTT, M.: *Multicriteria Optimization*, Springer, (2005). DOI: [10.1007/3-540-27659-9](https://doi.org/10.1007/3-540-27659-9)
- [10] FORGÓ, F. AND TEMESI, J.: *Computer-aided licence selection* Engineering Cost and Production Economics, Vol. **11** No. **3**, pp. 161-170 (1987). DOI: [10.1016/0167-188X\(87\)90039-5](https://doi.org/10.1016/0167-188X(87)90039-5)
- [11] FÜLÖP, J. AND TEMESI, J.: *A Data Envelopment Analysis (DEA) alkalmazása ipari parkok hatékonyságának vizsgálatára*, Szigma, XXXII. évf., 3-4.sz., pp. 85-110 (2001).
- [12] GÁSPÁR, L. AND TEMESI, J.: *Lineáris programozási gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, (1987,1. kiadás, 2002, 5. kiadás)
- [13] GÁSPÁR, L. AND TEMESI, J.: *Matematikai programozási gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, (1989, 1. kiadás, 1999, 4. kiadás)
- [14] NÉMETH, S.Z., RAPCSÁK, T. AND TEMESI, J.: *Evaluation of tenders for developing the economy*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **13** No. **3**, pp. 299-317 (2005).
- [15] PÓR, A., STAHL, J. AND TEMESI, J.: *Decision support system for production control: multiple criteria decision making in practice*, Engineering Cost and Production Economics, Vol. **20** No. **2**, pp. 213-218 (1990). DOI: [10.1016/0167-188X\(90\)90104-P](https://doi.org/10.1016/0167-188X(90)90104-P)
- [16] SAATY, T.L.: *The Analytic Hierarchy Process*, New York, McGraw-Hill, (1980).
- [17] STEUER, R.E.: *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, New York, Wiley, DOI: [10.1002/oca.4660100109](https://doi.org/10.1002/oca.4660100109)
- [18] TEMESI, J.: *A döntéselmélet alapjai*, Aula Kiadó, Budapest, (2002).  
<https://www.worldcat.org/title/donteselmélet-alapjai/oclc/909532354>
- [19] TEMESI, J.: *Consistency of the decision-maker in pair-wise comparisons*, International Journal of Management and Decision Making, Vol. **7** No. **2/3**, pp. 267-274 (2006). DOI: [10.1504/IJMDM.2006.009148](https://doi.org/10.1504/IJMDM.2006.009148)
- [20] TEMESI, J.: *Pairwise comparison matrices and the error-free property of the decision-maker*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **19** No. **2**, pp. 239-249 (2011). DOI: [10.1007/s10100-010-0145-8](https://doi.org/10.1007/s10100-010-0145-8)
- [21] TEMESI, J.: *An interactive approach to determine the elements of a pairwise comparison matrix*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **27** No. **2**, pp. 533-549 (2019). DOI: [10.1007/s10100-018-0539-6](https://doi.org/10.1007/s10100-018-0539-6)
- [22] VARRÓ, Z. AND TEMESI, J.: *Operációkutatás*, Aula Kiadó, Budapest, 2007, Akadémiai Kiadó, (2014), (2017). DOI: [10.1556/9789630598699](https://doi.org/10.1556/9789630598699)
- [23] YU, P.L.: *A Class of Solutions for Group Decision Problems*, Management Science, Vol. **19** No. **8**, pp. 936-946 (1973). DOI: [10.1287/mnsc.19.8.936](https://doi.org/10.1287/mnsc.19.8.936)
- [24] YU, P.L. AND ZELENY, M.: *The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **49**, pp. 430-468 (1975). DOI: [10.1016/0022-247X\(75\)90189-4](https://doi.org/10.1016/0022-247X(75)90189-4)



Temesi József 1950-ben született, egyetemi tanulmányait 1969 és 1974 között végezte a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem népgazdasági tervező-elemző szakán. 1974-től 2015-ig ennek az egyetemnek a Matematika Tanszékén és jogutódain dolgozott, 1997-től egyetemi tanárként, 2000 és 2014 között az Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék vezetőjeként. Jelenleg a Budapesti Corvinus Egyetem professor emeritusa. 1992-ben kandidátusi fokozatot szerzett a közgazdaságtudományok területén, 1998-ban habilitált. Több ciklusban és jelenleg is az MTA Operációkutatási Bizottság tagja.

A Magyar Operációkutatási Társaság vezetőségi tagja, majd 2006 és 2008 között elnöke, a Gazdaságmodellezési Társaságnak elnökségi tagja, majd 2012 és 2015 között elnöke volt. A GMT közgazdasági-matematikai lapjának, a Szigmának 20 éven keresztül szerkesztője, szerkesztőbizottsági tagja. Az elmúlt 40 évben számos magyar és nemzetközi konferencia szervező bizottsági tagja, előadója. 1998-ban Széchenyi ösztöndíjat nyert el, 2006-ban a Magyar Köztársasági Érdemrend tisztikeresztjével tüntették ki. Szakmai díjai: Krekó Béla-díj (2017), Egerváry Jenő emléklap (2019). Kutatási és oktatási témái az operációkutatás és a döntéshozatal elméleti és alkalmazási területeihez kapcsolódnak, könyvei és cikkei ezekben a témákban jelentek meg magyar és angol nyelven. Az MTMT-ben az ide sorolható publikációk száma mintegy 100, az ezekre történt független hivatkozások száma 250.

TEMESI JÓZSEF

Budapesti Corvinus Egyetem  
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék  
1098 Budapest, Fővám tér 8.  
jozsef.temesi@uni-corvinus.hu

## PAIWISE COMPARISONS FOR DECISION MAKING

JÓZSEF TEMESI

Multi-attribute decision making problems have finite sets of alternatives and criteria. The goal is to derive a ranking of alternatives according to the criteria or to find the best alternative. The input of the decision problem is the decision matrix. This invited paper deals with a popular technique of generating a decision matrix, the method of pairwise comparisons. The aim of the short paper is to describe some properties of pairwise comparisons highlighting the explicit and implicit conditions of its application, and summarizing some results of the author in that field. The conclusion is that the interpretation of the results in real-life applications has to take into account both the advantages and drawbacks of the technique, and it is of utmost importance to involve the decision maker in the solution process.

*Keywords:* pairwise comparisons, multi-attribute decision making, interactive procedures.

## SPORTBAJNOKSÁGOK TERVEZÉSE: TANULSÁGOK A FÉRFI KÉZILABDA BAJNOKOK LIGÁJÁBÓL

CSATÓ LÁSZLÓ

Számos sportbajnokságot a csoportkört követő egyenes kieséses szakasszal, vegyes lebonyolítási rendszerben szerveznek. Ennek során általában megközelítőleg azonos erejű csoportok kialakítására törekcszenek, ezért – amennyiben a csapatok ereje jelentősen különbözik – sok csoportmérkőzés eredményének bizonytalansága alacsonnyá válhat, ami hátrányosan érinti azok nézettségét. Ezért a férfi EHF Bajnokok Ligája, az európai kézilabda klubcsapatok legrangosabb tornája a 2015/16-os szezonról kezdve különböző erősségű csoportokkal indul. Az új formátumot szimulációs technikák segítségével hasonlítjuk össze egy hagyományos, azonos erejű csoportokon alapuló bajnoksággal. Megmutatjuk, hogy a változtatás révén növelhető a lejátszott mérkőzések színvonala és izgalmassága, azaz a mérkőzéseken átlagosan erősebb és kevésbé eltérő képességű csapatok játszanak, miközben továbbra sem képesek manipulálni a bajnokságot önmaguk gyengébbnek feltüntetésével. Eredményeink fontos üzenettel bírnak a döntéshozók számára. Ennek illusztrálásra alternatív mechanizmust javasunk az UEFA Bajnokok Ligája, az európai labdarúgóklubok részvételével játszott legrangosabb kupasorozat megrendezésére.

*„A ki szereti a dorgálást, szereti a tudományt;  
a ki pedig gyűlöli a fenyítéket, oktalan az.”*

(Példabeszédek könyve 12:1)

### 1. Bevezetés

A sportbajnokságok két alapvető formátuma az egyenes kiesés (*knockout*) és a körmérkőzés (*round-robin*). Előbbi esetén egy adott forduló mérkőzéseinek győztesei játszanak a következő fordulóban, míg a vesztesek kiesnek a további küzdelemből. Az utóbbinál viszont az eredményektől függetlenül minden csapat megmérkőzik minden másikkal. Miután ez nagyszámú résztvevő esetén túlságosan sok mérkőzés lejátszását igényelné, ezért a többek között a sakiban alkalmazott

svájci rendszer (*Swiss system*) rögzített fordulózám mellett törekszik a legjobb kiválasztására, a korábban közel azonosan teljesítő játékosok párosításával [2].

Számos sportágban, például a kézilabdában, a kosárlabdában, vagy a labdarúgásban vegyes sportbajnokságokat is rendeznek, ahol jellemzően a körmérkőzéses csoportkört az egyenes kieséses szakasz követi. A csoportkör során – miután a mérkőzések száma a csoportot alkotó csapatok számának négyzetével arányosan növekszik – szintén több csoportba osztják a résztvevőket, melyekből az első néhány helyezett jut tovább, tehát a következő körbe kerülés esélyét döntően befolyásolja az ellenfelek ereje. Az azonos erejű csoportok kialakítását többnyire egy tradicionális sorsolási rendszer biztosítja: a csapatokat múltbeli teljesítményük alapján rangsorolják, majd  $k$  csoport és  $m \times k$  csapat esetén az első kalapba sorolják a  $k$  legerősebb csapatot, a második kalapba a következő  $k$  csapatot, és így tovább, végül az utolsó,  $m$ -edik kalapba a leggyengébb  $k$  csapatot. Ezt követően minden csoport egy-egy csapatot kap mindegyik kalapból.

Az utóbbi időben több tanulmány foglalkozott e sorsolási folyamat igazságosságával [4, 12, 15], azonban tudomásunk szerint egyetlen cikk sem kérdőjelezte meg az azonos erejű csoportok kialakításának paradigmáját. Pedig sok esetben jelentős különbség van a csoportkörben induló csapatok között, a nézettség szempontjából viszont nem feltétlenül optimális az erős és gyenge csapatok egymás elleni mérkőzéseinek jelentős száma [3]. Ezért megfontolandó lehet a különböző erejű, nem kiegyensúlyozott csoportokat tartalmazó bajnokságok szervezése. Az alábbiakban ezt a problémát vizsgáljuk a férfi kézilabda Bajnokok Ligája példáján keresztül, a szakirodalomban gyakran használt szimulációs technikák segítségével [1, 6, 17, 18].

Munkánkkal szeretnénk hozzájárulni a téma hazai népszerűsítéséhez is. A különböző lebonyolítási rendszerek szimulációs összehasonlításával csupán egy friss magyar nyelvű műhelytanulmány foglalkozik: [10] az egyéni teljesítménysportok versenyformátumainak hatékonyságát vizsgálja. Ugyanakkor több cikk tárgyal a sportban felmerülő kérdéseket, például [11] a sportbajnokságokon belüli erőviszonyokat a statisztikában használt koncentrációs mérőszámok segítségével modellezi, míg [8] a labdarúgás büntetőpárbajainak igazságosságát elemzi.

A cikk az alábbi felépítést követi. A 2. fejezet bemutatja a férfi kézilabda Bajnokok Ligája és egy alternatív, azonos erejű csoportokat tartalmazó bajnokság jellemzőit. A 3. fejezet az összehasonlítás technikáját, a 4. fejezet pedig a főbb eredményeket ismerteti. Ebből kiindulva az 5. fejezet az UEFA Bajnokok Ligája csoportkörének alternatív lebonyolítására tesz javaslatot. Tanulmányunkat rövid összeggel zárjuk.

## 2. Egy innovatív lebonyolítási rendszer

Az EHF (*European Handball Federation*, Európai Kézilabda-szövetség) által szervezett férfi kézilabda Bajnokok Ligája (BL) az európai klubcsapatok legrango-



sabb tornája. A versenysorozatot a 2015/16-os szezontól új, a klasszikustól eltérő lebonyolítási rendszer alapján rendezik meg.

A 28 résztvevőt két nyolccsapatos (A, B) és két hatszapos (C, D) csoportba osztják, ahol körmérkőzéseket játszanak, minden csapat az összes többivel egyszer otthon, egyszer idegenben mérkőzik meg. Az A és B csoportok első helyezettjei közvetlenül a negyeddöntőbe jutnak, az utolsó kettő kiesik, a fennmaradó öt-öt csapat pedig az első egyenes kieséses szakaszba kerül. A C és D csoportok utolsó négy csapata kiesik, az első két-két helyezett közül pedig a rájátszás két győztese szintén az első egyenes kieséses szakaszba jut, ahol így 12 csapat vesz részt, majd a hat továbbjutó a negyeddöntőbe jut. Ennek nyertesei alkotják a Final Four mezőnyét. Az egyenes kieséses szakasz minden párharca oda-visszavágós, kivéve a Final Fourt, melyet a 2009/10-es idénytől kezdve a kölni Lanxess Arénában rendeznek meg.

A sorozat sémáját [7, Figure A.1] vázolja, ezt a lebonyolítási rendszert a  $D(8+6)$  szimbólummal jelöljük.

A hasonló lebonyolítási rendszerek számos szempontból értékelhetők, itt a  $D(8+6)$  bajnokság egy „különlegességét” emeljük ki. A szimulációs vizsgálat során több célfüggvényt is meg fogunk vizsgálni.

*2.1. Definíció.* Egy bajnokság *kiegyensúlyozott (balanced)*, ha azonos képességű csapatok a sorsolást követően, *ex post* egyenlő valószínűséggel nyerhetnek.

2.1. ÁLLÍTÁS. A  $D(8+6)$  bajnokság nem kiegyensúlyozott.

*Bizonyítás.* Tekintsünk egy A vagy B csoportba sorsolt csapatot. Ez  $1/8$  valószínűséggel csoportgyőztes lesz,  $1/4$  valószínűséggel kiesik,  $5/8$  valószínűséggel pedig az első egyenes kieséses szakaszba kerül, ahonnan  $1/2$  valószínűséggel jut tovább. Tehát a negyeddöntő elérésének valószínűsége  $1/8 + 5/8 \times 1/2 = 7/16$ , az elődöntőé  $7/32$ , a végső győzelemé pedig  $7/128$ .

Ezzel szemben egy C vagy D csoportba sorsolt csapat  $1/3$  valószínűséggel vehet részt a rájátszásban,  $1/6$  eséllyel jut az első egyenes kieséses szakaszba,  $1/12$  valószínűséggel pedig a negyeddöntőbe. Az elődöntőbe kerülés esélye  $1/24$ , míg a trófea megszerzéséé  $1/96$ . Tehát azonos képességű csapatok közül a szerencsésebb  $84/16 = 5,25$ -ször akkora valószínűséggel nyerhet.  $\square$

Az összehasonlíthatóság érdekében konstruáltunk egy hasonló, de azonos erejű csoportokat tartalmazó, szintén 28 résztvevős formátumot, melyet a  $D(4 \times 7)$  szimbólummal jelölünk. Ez négy hétszapos csoportból áll, melyekből az első kettő közvetlenül a nyolcaddöntőbe, a legjobb 16 közé jut, a következő négy, tehát összesen 16 csapat pedig egymással játszik a nyolcaddöntő fennmaradó nyolc helyéért, az utolsó kiesik. A rendszer sémáját [7, Figure A.2] mutatja.

2.2. ÁLLÍTÁS. A  $D(4 \times 7)$  bajnokság kiegyensúlyozott.

A két formátum mérkőzéseit az 1. táblázat összegzi.

1. táblázat. Mérkőzések száma

Lebonyolítási rendszer	$D(8 + 6)$	$D(4 \times 7)$
A és B csoport	112	84
C és D csoport	60	84
Rájátszás	4	—
Első egyenes kieséses szakasz	12	16
Nyolcaddöntő	—	16
Negyeddöntő	8	8
Final Four	4	4
<b>Összesen</b>	<b>200</b>	<b>212</b>

### 3. Az összehasonlítás módszertana

Különböző bajnokságok összehasonlításának megszokott eszköze a Monte-Carlo szimulációk használata: az egyes mérkőzések eredményét valószínűségi változónak tekintve egy futtatás a bajnokság egy lehetséges kimenetelét jelenti, melyekből elég sokat elvégezve megbecsülhető a keresett mérőszámok eloszlása.

[6] nyomán feltesszük, hogy az  $i$  csapat az alábbi rögzített valószínűséggel győzi le a  $j$  csapatot:

$$p_{ij} = \frac{1}{1 + [(i + \beta)/(j + \beta)]^\alpha}, \quad (1)$$

ahol  $\alpha, \beta \geq 0$  paraméterek,  $1 \leq i, j \leq 28$  pedig a csapatok „azonosítói” vagy indexei, amit azok erejének mércéjeként értelmezhetünk, hasonlóan a sakkból ismert Élő-pontrendszerhez. A döntetlen lehetőségét kizárjuk.

A témában született, elsősorban a labdarúgással foglalkozó cikkek többsége ugyan specifikus előrejelző modelleket használ [18], azonban a különböző lebonyolítási rendszereket elméleti alapon vizsgáló szerzők általában a fentihez hasonló megoldással élnek [1, 17]. A kézilabda-mérkőzések modellezése eleve nehéz feladat, az eredményeket számos, egyszerre aligha figyelembe vehető tényező befolyásolhatja. Emellett célunk nem pusztán a férfi kézilabda BL által használt formátum értékelése, hanem minél általánosabb következtetések levonása. Végül, összehasonlító célokra lényegében bármilyen „értelmes” valószínűségi modell használható, bár ennek áraként a mérőszámok önmagukban nem, csak egymáshoz viszonyítva értékelhetők [1].

Az (1) formula által adott valószínűségek jelennek meg a [14] és [16] cikkekben  $\beta = 0$  mellett. A paramétert a férfi kézilabda-világ bajnokságok lebonyolítási rendszereit összehasonlító tanulmányunk [6] vezette be azért, hogy csökkenjen a legerősebb csapatok közötti egyenlőtlenség. Itt végig a  $\beta = 24$  értéket használjuk.

Az  $\alpha$  változó a csapatok erőkülönbségét mutatja, növelésével egyre fokozódik ennek mértéke. Érzékenységvizsgálat céljából három különböző ( $\alpha = 3, 4, 5$ ) értéket választottunk. Ekkor a  $k - 1$  indexű csapat 55%-nál kisebb valószínűséggel győzi le a  $k$  indexűt még  $\alpha = 5$  esetén is, ugyanakkor lényeges különbség van a résztvevők ereje között, a legjobb csapat már  $\alpha = 3$  mellett 80%-nál nagyobb eséllyel nyer a 13 legrosszabb ellen.

A sorsolásnak értelemszerűen jelentős szerepe lehet az egyenes kieséses bajnokságok várható eredményében [13, 19]. Esetünkben az egyenes kieséses szakasz már determinisztikus – kivéve a Final Fourt, ahol véletlenszerűen választanak az elődöntők három lehetséges párosítása közül –, a csapatok csoportokba osztása azonban nem. Bár a férfi kézilabda BL sorsolása kevésbé szabályozott, úgy tűnik, az EHF Végrehajtó Bizottsága arra törekszik, hogy a 16 legerősebb csapat kerüljön az A és B, a maradék 12 pedig a C és D csoportokba. Tehát a tradicionális eljárásnak megfelelően az 1. kalapba osztjuk a két legerősebb, a 2. kalapba a következő kettő, végül a 14. kalapba a két leggyengébb csapatot, majd az A és B csoportok véletlenszerűen egy-egy csapatot kapnak az 1-8., a C és D csoportok pedig egy-egy csapatot kapnak a 9-14. kalapokból. Ezt a változatot a  $D(8 + 6)/S$  szimbólummal jelöljük. A tradicionális, kiegyensúlyozott csoportokat tartalmazó  $D(4 \times 7)$  formátum esetén ugyanezt az elvet követjük, azaz az  $\ell$ -edik kalapba kerül a négy  $4\ell - 3$  és  $4\ell$  közötti indexű csapat, majd mindegyik csoport mindegyik kalapból véletlenszerűen kap egy-egy csapatot. Ez a  $D(4 \times 7)/S$  változat.

Mivel a valóságban előzetesen nem ismert, csak becsülhető az egyes csapatok játékereje, mindkét formátum esetén két változatot vizsgálunk. Az optimálisan sorsolt bajnokságok szervezőjének tökéletes információja van a csapatok képességeiről, tehát a két legerősebb csapat biztosan nem kerül azonos csoportba. A másik, szélsőségesen véletlenszerűnek tekinthető verzióban a csapatok sorsolás során használt indexét sztochasztikussá tesszük, ezzel bizonytalanságot viszünk a sorsolásba, miközben a csapatok valódi ereje változatlan marad: a kalapokba osztást a csapatok  $44 \times Rnd + (28 - i)$  képlettel kapott ideiglenes címkéje alapján végezzük, ahol  $i$  a csapat ereje,  $Rnd$  pedig egy, a  $[0, 1)$  intervallumból egyenletes elosztással húzott szám. Az így sorsolt formátumokat a  $D(8 + 6)/R$  és  $D(4 \times 7)/R$  szimbólumokkal jelöljük. Ekkor a legerősebb csapat mintegy 85%-os valószínűséggel kerül a  $D(8 + 6)$  bajnokság erősebb A vagy B csoportjaiba (szemben a teljes bizonytalanságot feltételező 57,14%-kal), és még a leggyengébb csapatnak is 25% körüli esélye van erre [7, Figure 2]. Azt gondoljuk, a múltbeli teljesítmény alapján ennél biztosabban is előrejelezhető a csapatok ereje, annak ellenére, hogy a férfi kézilabda BL 2017/18-as kiírását a Montpellier Handball (az előző évi francia bajnokságban 4. helyezett) csapata a C csoportból nyerte meg.

A csoportmeccsek eredménye közvetlenül meghatározható az (1) formula alapján. Ugyanez igaz a Final Fourra. Az egyenes kieséses szakaszban már bonyolultabb a helyzet, hiszen a párharcok két mérkőzésből állnak. Ezért azt a megoldást választottuk, hogy a két csapat „formálisan” három mérkőzésen dönti el a párharc

cot, más megfogalmazással, az egy-egy győzelem után kialakuló patthelyzetet egy újabb mérkőzés lejátsszásával oldják fel. Ennek oka, hogy a rögzített valószínűségeket tartalmazó modellünkben a két mérkőzés után még döntetlenre álló párharc győztesének 50-50%-os valószínűséggel történő, véletlenszerű sorsolása pontosan ekvivalens azzal, mint amikor csupán egyetlen mérkőzést játszanak le – holott egy helyett két mérkőzés rendezése nyilvánvalóan az erősebbnek kedvez. Bár ez a megoldás némileg fokozza a csapatok képességének különbözőségét, a torzítás hatása azonban hasonló az  $\alpha$  paraméter növeléséhez, amire vonatkozóan érzékenységvizsgálatot végzünk.

A 2. fejezet alapján a hazai pálya előnyétől eltekinthetünk, mert a csoportok és az egyenes kieséses szakasz összes mérkőzése oda-visszavágós a semleges pályán rendezett Final Four kivételével.

#### 4. Eredmények

A 28 csapatos bajnokság két formátumának összehasonlítására három mérőszámot vizsgálunk: (1) a legerősebb csapatok kiválasztásának képességét (a lebonyolítás hatékonyságát) tükrözi az első, a második, a harmadik és a negyedik helyezett átlagos indexszáma; (2) az összes lejátszott mérkőzés színvonalát mutatja az azokat játszó csapatok indexei összegének átlaga; (3) a várható erőkoncentrációt (*competitive balance*) a mérkőzéseket játszó csapatok indexszámainak átlagos különbségével számszerűsítjük.

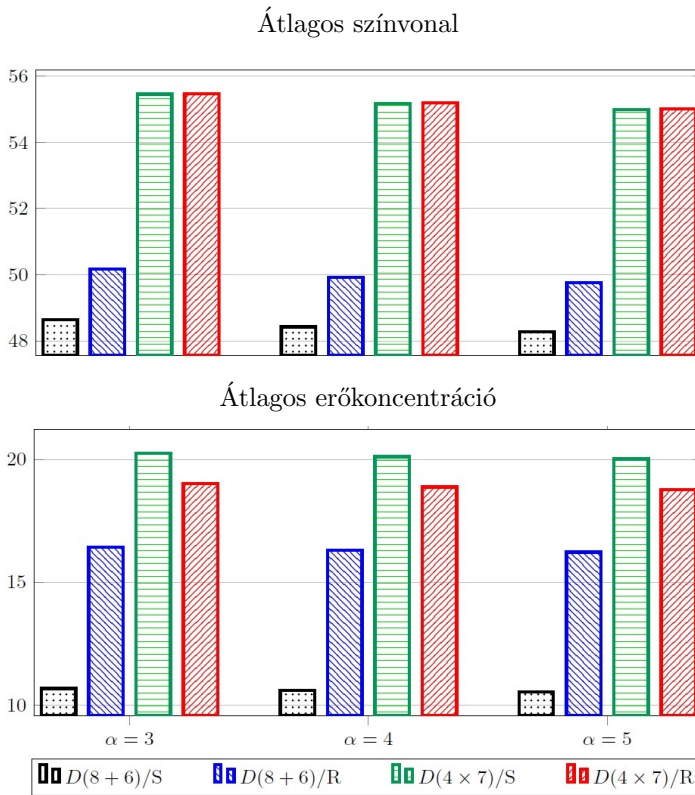
Az eredményeket részletesen, ábrákkal illusztrálva tárgyalja [7], itt csak röviden ismertetjük azokat. Az 1. ábra alapján a  $D(8+6)$  formátumot alkalmazva mindegyik mutató tekintetében kedvezőbb (alacsonyabb) várható értéket kapunk. Előnye különösen jelentős a két elsődleges cél, a mérkőzések átlagos színvonala és erőkoncentrációja tekintetében, bár a nem tökéletes sorsolás érthető módon sokat ront teljesítményén. Ezzel szemben a hagyományos  $D(4 \times 7)$  rendszer jellemzőit alig befolyásolja ez a választás, sőt a mérkőzések várható erőkoncentrációja tekintetében kismértékű javulás következik be a nem tökéletes sorsolásnál, mert megengedi a kizárólag erős vagy gyenge csapatok alkotta csoportok létrejöttét.

Mivel a szervezők számára ez valószínűleg a hatékonyság csekély romlásával együtt is elfogadható lenne, annak – a kevesebb lejátszott mérkőzés ellenére – előnyösebb értéke tovább erősíti a  $D(8+6)$  formátum fölényét.

Ugyanakkor felmerülhet, nem lehetséges-e visszaélni az eltérő csoportterösszeggel, azaz szándékosan gyenge teljesítményt nyújtva a C vagy D csoportba kerülni, hátha onnan indulva, gyengébb ellenfelekkel játszva könnyebben kiharcolható a győzelem. A kérdés nem csak elméleti jelentőségű, hiszen, mint már említettük, a férfi kézilabda BL 2017/18-as szezonját egy C csoportba sorsolt csapat nyerte.

Ennek vizsgálatára az 1-8. és 18-28. csapatok esetén megtartottuk eredeti indexszámukat, a 9. legjobb a 17-es, a 10-17. csapatok pedig az eredetinel egygyel

1. ábra. Az összes lejátszott mérkőzés jellemzői



kisebbségi azonosítót kaptak.  $\alpha = 3$  és tökéletes sorsolás esetén a 9. legerősebb csapat kimondottan rosszul jár ezzel a változtatással, de a többi esetben sem kerül kedvezőbb helyzetbe a 8. legjobb csapatnál. Azaz a  $D(8+6)$  lebonyolítási rendszer nem érzékeny az ehhez hasonló stratégiai manipulációra.

Az összes fenti eredmény robusztus az  $\alpha$  paraméter vizsgált értékeire nézve.

## 5. Kitekintés

A labdarúgásban szintén megfigyelhető bizonyos csapatok eltérő kezelése. Az UEFA (*Union of European Football Associations*, Európai Labdarúgó-szövetség) által szervezett Bajnokok Ligája selejtezőjében a 2009/10-es idénytől kezdve a bajnokcsapatok és a nem bajnokok külön ágon versengenek. A 2018 szeptemberétől megrendezett Nemzetek Ligája az 55 nemzeti válogatottat múltbeli teljesítményük alapján négy ligába osztja.

Ezek alapján felmerülhet a nem kiegyensúlyozott csoportok bevezetése az UEFA Bajnokok Ligája, az európai klubcsapatok legrangosabb éves tornájának reformja során, melynek egyik legfontosabb célja a mérkőzések közvetítéséből származó bevételek növelése. Jelenleg a 32 résztvevőt nyolc négycsapatos csoportba osztják, lényegében a tradicionális megoldást követve [5, 9]. Ennek egy alternatívája lehetne, ha a 16 legjobb, jelenleg az első két kalapból húzott csapat kerülne a négy erősebb, a következő 16, a 3. és 4. kalapból húzott csapat pedig a négy gyengébb csoportba, majd az erősebb csoportokból három-három, a gyengébbekből egy-egy csapat jutna a nyolcaddöntőbe. Ezzel a megoldással úgy lenne növelhető a vezető klubok közötti mérkőzések száma, hogy a kis, szegényebb csapatokat sem fosztanák meg a trófea megszerzésének lehetőségétől.

## 6. Összefoglalás

A cikk a vegyes formátumban, a csoportkört követő egyenes kieséses szakasszal szervezett bajnokságok optimális lebonyolításának kérdését vizsgálta. A férfi kézilabda Bajnokok Ligája példáján keresztül megmutattuk, megfontolásra érdemes a nem kiegyensúlyozott, különböző erejű csoportokat tartalmazó formátumok használata, mert ezáltal növelhető a mérkőzések átlagos színvonala és izgalmassága.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönöm édesapám segítségét a szimulációk elkészítésében.

Hálás vagyok *Petróczy Dóra Gréta* hasznos megjegyzéseiért.

A kutatást az MTA Prémium posztdoktori kutatói program PPD2019-9/2019 számú pályázata támogatta.

## Hivatkozások

- [1] D. R. APPLETON: *May the best man win?*, Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician), Vol. **44** No. **4**, pp. 529-538 (1995). DOI: [10.2307/2348901](https://doi.org/10.2307/2348901)
- [2] P. BIRÓ, T. FLEINER AND R. P. PALINCZA: *Designing chess pairing mechanisms*, In: A. FRANK, A. RECSKI, AND G. WIENER, *Proceedings of the 10th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, Department of Computer Science and Information Theory, Budapest University of Technology and Economics, pp. 77-86 (2017). URL: <http://real.mtak.hu/80732/1/jXaio4T11ygd57.pdf>
- [3] J. BORLAND AND R. MACDONALD: *Demand for sport*, Oxford Review of Economic Policy, Vol. **19** No. **4**, pp. 478-502 (2003). DOI: [10.1093/oxrep/19.4.478](https://doi.org/10.1093/oxrep/19.4.478)

- [4] S. CEA, G. DURÁN, M. GUAJARDO, D. SAURÉ, J. SIEBERT AND G. ZAMORANO: *An analytics approach to the FIFA ranking procedure and the World Cup final draw*, Annals of Operations Research, Vol. **286** No. **1-2**, pp. 119-146 (2020). DOI: [10.1007/s10479-019-03261-8](https://doi.org/10.1007/s10479-019-03261-8).
- [5] F. CORONA, D. FORREST, J. D. TENA AND M. WIPER: *Bayesian forecasting of UEFA Champions League under alternative seeding regimes*, International Journal of Forecasting, Vol. **35** No. **2**, pp. 722-732 (2019). DOI: [10.1016/j.ijforecast.2018.07.009](https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2018.07.009).
- [6] L. CSATÓ: *A simulation comparison of tournament designs for the World Men's Handball Championships*, International Transactions in Operational Research, megjelenés alatt. DOI: [10.1111/itor.12691](https://doi.org/10.1111/itor.12691).
- [7] L. CSATÓ: *Optimal tournament design: lessons from the men's handball Champions League*. arXiv: [1811.11850v5](https://arxiv.org/abs/1811.11850v5)
- [8] L. CSATÓ AND D. G. PETRÓCZY: *Hogyan tehető igazságosabbá a labdarúgó mérkőzéseket követő büntetőpárbaj?*, Statisztikai Szemle, Vol. **97** No. **8**, pp. 779-798 (2019). DOI: [10.20311/stat2019.8.hu0779](https://doi.org/10.20311/stat2019.8.hu0779)
- [9] D. DAGEV AND V. RUDYAK: *Seeding the UEFA Champions League participants: Evaluation of the reform*, Journal of Quantitative Analysis in Sports, Vol. **15** No. **2**, pp. 129-140 (2019). DOI: [10.1515/jqas-2017-0130](https://doi.org/10.1515/jqas-2017-0130)
- [10] B. DOBRÁNSZKY AND B. R. SZIKLAI: *Az időn múlik? Egyéni teljesítménysportok hatékonyságvizsgálata Monte Carlo szimuláció segítségével*, IEHAS discussion paper series MT-DP – 2019/19. URL: <http://real.mtak.hu/103013/1/MTDP1919.pdf>
- [11] D. I. FÜRÉSZ AND G. RAPPAI: *Koncentrációs mérőszámok „sportos” szerepkörben*, Statisztikai Szemle, Vol. **96** No. **10**, pp. 949-972 (2018). DOI: [10.20311/stat2018.10.hu0949](https://doi.org/10.20311/stat2018.10.hu0949)
- [12] J. GUYON: *Rethinking the FIFA World Cup<sup>TM</sup> final draw*, Journal of Quantitative Analysis in Sports, Vol. **11** No. **3**, pp. 169-182 (2015). DOI: [10.1515/jqas-2014-0030](https://doi.org/10.1515/jqas-2014-0030)
- [13] F. K. HWANG: *New concepts in seeding knockout tournaments*, The American Mathematical Monthly, Vol. **89** No. **4**, pp. 235-239 (1982). DOI: [10.1080/00029890.1982.11995420](https://doi.org/10.1080/00029890.1982.11995420)
- [14] D. A. JACKSON: *Independent trials are a model for disaster*, Applied Statistics, Vol. **42** No. **1**, pp. 211-220 (1993). DOI: [10.2307/2347421](https://doi.org/10.2307/2347421)
- [15] P. LALIENA AND F. J. LÓPEZ: *Fair draws for group rounds in sport tournaments*, International Transactions in Operational Research, Vol. **26** No. **2**, pp. 439-457 (2019). DOI: [10.1111/itor.12565](https://doi.org/10.1111/itor.12565)
- [16] É. MARCHAND: *On the comparison between standard and random knockout tournaments*, Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician), Vol. **51** No. **2**, pp. 169-178 (2002). DOI: [10.1111/1467-9884.00309](https://doi.org/10.1111/1467-9884.00309)
- [17] T. MCGARRY AND R. W. SCHUTZ: *Efficacy of traditional sport tournament structures*, Journal of the Operational Research Society, Vol. **48** No. **1**, pp. 65-74 (1997). DOI: [10.1057/palgrave.jors.2600330](https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600330)
- [18] P. SCARF, M. M. YUSOF AND M. BILBAO: *A numerical study of designs for sporting contests*, European Journal of Operational Research, Vol. **198** No. **1**, pp. 190-198 (2009). DOI: [10.1016/j.ejor.2008.07.029](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.07.029)
- [19] A. J. SCHWENK: *What is the correct way to seed a knockout tournament?*, The American Mathematical Monthly, Vol. **107** No. **2**, pp. 140-150 (2000). DOI: [10.1080/00029890.2000.12005171](https://doi.org/10.1080/00029890.2000.12005171)





Csató László 1987-ben született. A Budapesti Corvinus Egyetem gazdaságelemzés BSc (2009) és gazdaság-matematikai elemző MSc (2011) szakán végzett. PhD fokozatát 2015-ben a Budapesti Corvinus Egyetemen szerezte Fülöp János és Temesi József témavezetésével. Elismerései: BCE Kutatási Kiválósági Díj (2016), MTA Prémium posztdoktori kutatói program (2016–2019, 2019–2022), Farkas Gyula emlékdíj (2018). 2014 óta oktat a BCE Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszékén, 2017-től egyetemi adjunktusként, emellett 2016 óta az (MTA) SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoportjának tudományos munkatársa. Fő kutatási területei a döntéselmélet, a játékelmélet és az operációkutatás a sportban. 17 angol nyelvű cikke közül 15 implekt faktoros, 15 egyszerűs.

#### CSATÓ LÁSZLÓ

Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet  
1111 Budapest, Kende utca 13-17.  
csato.laszlo@sztaki.hu

Budapesti Corvinus Egyetem  
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék  
1093 Budapest, Fővám tér 13-15.  
laszlo.csato@uni-corvinus.hu

#### HOW TO DESIGN HYBRID TOURNAMENTS: LESSONS FROM THE MEN'S HANDBALL CHAMPIONS LEAGUE

LÁSZLÓ CSATÓ

Many sports tournaments are organised in a hybrid design consisting of a round-robin group stage followed by a knock-out phase. The traditional seeding regime aims to create balanced groups roughly at the same competition level but may result in several uneven matches when the quality of the teams varies greatly. Our paper is the first challenging this classical solution through the example of the men's EHF (European Handball Federation) Champions League, the most prestigious handball club competition in Europe, which has used unbalanced groups from the 2015/16 season. Its particular design is compared to an alternative format with equally strong groups. We find that it is possible to increase the quality of all matches played together with raising the uncertainty of outcome, essentially without sacrificing fairness. Our results have useful implications for the governing bodies of major sports. As an illustration, a new format is proposed for the UEFA (Union of European Football Associations) Champions League, which guarantees more matches between the elite clubs.

*Keywords:* OR in sports; tournament design; simulation; handball; competitive balance

*Mathematics Subject Classification* (2000): 62F07, 68U20

*Alkalmazott Matematikai Lapok* (2020)



## BEFOLYÁS TERJEDÉS OPTIMUMAINAK HÁLÓZATÁRÓL

HOMOLYA VIKTOR, VINKÓ TAMÁS

A gráfokon értelmezett befolyás terjedés maximalizálás feladatát vizsgáljuk egy újfajta megközelítésben. Bevezetünk egy hegymászó-jellegű algoritmust, amelynek futtatásával értelmezhetjük a szóban forgó diszkrét optimalizálási feladat lokális optimumait, valamint az azok közötti kapcsolatokat. Az így adódó módszer néhány lehetséges alkalmazására, a keresési tér értékészletének felderítésére adunk példát különböző véletlen gráfokon végzett futtatási eredményekből.

### 1. Bevezetés

Legyen adott egy irányított, súlyozott hálózat, továbbá egy terjedési modell és egy  $k$  pozitív egész szám. Feladatunk, hogy kiválasszuk azt a  $k$  darab csúcsot, amelyekből a terjedési modellt indítva és végrehajtva a lehető legtöbb csúcsot elérjük. Az így kapott probléma, a befolyás terjedés maximalizálás, gyakran használt eszköz például a vírusmarketingben. Gazdasági szempontból egy példa lehet a következő: korlátozott mennyiségben van reklámozásra költségünk, maximalizálni szeretnénk az információ terjedést a termékünkéről, tehát a lehető legtöbb emberhez szeretnénk eljuttatni. A gráf reprezentálja a közösséget, melyben terjesztenénk az információt. Mint szociális hálózat, nem tartalmaz többszörös éleket és hurkokat, valamint minden egyed különböző mértékben tud hatni másokra.

A befolyás terjedés hálózatokon, mint diszkrét optimalizálási feladat először Kempe és szerzőtársai [10] cikkében jelent meg, amely Domingos és Richardson korai munkáján [6] alapszik. Ebben a mostanra klasszikussá vált cikkben adták meg a szerzők a dolgozatunkban is használt független kaszkád (independent cascade, IC) valamint a lineáris küszöb (linear threshold, LT) modelleket. Továbbá, ebben a cikkben javasolták a mohó algoritmust, amely a feladat matematikai tulajdonságából adódóan legalább  $1 - 1/e$  közelítést ad az optimális értékre. Megmutatták, hogy a probléma az alap terjedési modellekben (IC és LT), melyeket figyelembe vettek, NP-nehéz.

Amennyiben a megadott modellek naiv implementációjával kísérletezünk, hamar rájöhethetünk, hogy már akár százas nagyságrendű csúcs-számmal rendelkező gráfra is nagyon sokáig tart lefuttatni a mohó algoritmust (vagy szinte bármilyen

más optimalizáló eljárást). Ennek egyik oka, hogy a terjedési modellek sztochasztikus alaptulajdonságát Monte Carlo szimulációval tudjuk kiátlagolni (azaz empirikus várható érték közelítését számolni). Ezért hamar megjelentek, és azóta is az ide vonatkozó kutatások egyik fókuszába tartoznak azok a cikkek, amelyek a feladat gyorsabb megoldását tűzték ki célul. Leskovec és szerzőtársai [12] az LT modellre adnak egy ún. *lazy-forward* mohó algoritmust CELF néven. Ennek egy továbbgondolt változata a CELF++, amely az eredeti mohó eljárás iterációinak számát csökkenti nagyságrendekkel [7]. További gyorsítási módszereket is találunk a szakirodalomban, például olyat, amely közelítő eljárást javasol [11], vagy pedig valamilyen strukturális tulajdonságot, például közösségek jelenlétével hozza összefüggésbe a leghatékonyabban aktivizáló csúcsok kiválasztását [14].

Az alapfeladat helyett, ahol tehát egy megoldást akkor tekintünk jobbnak, ha minél több befolyás alá vont csúcsot eredményez, másképpen is megfogalmazhatunk ide kapcsolódó optimalizálási problémákat, vagy változtathatunk az alapgráf tulajdonságain. Ilyen lehet például az, amikor nem csak pozitív, hanem negatív súlyokat is megengedünk. Különösen érdekes a dinamikusan változó gráfok esete is [1]. Ebben a dolgozatban, csak az eredeti alapfeladattal foglalkozunk.

Célunk, hogy a befolyás terjedés maximalizálás, mint kombinatorikus optimalizálási feladat szerkezeti tulajdonságait mélyebben megértsük. Ehhez felhasználjuk a lokális optimumok hálózatának (local optima network, LON) koncepcióját. A módszerrel tulajdonképpen az eredeti hálózathoz, mint a keresési tér értelmezési tartományából, egy speciális, hegymászó-jellegű optimalizáló eljárás felhasználásával készítünk egy másik hálózatot, a LON-t, amelynek segítségével a keresési tér értékkészletének különböző strukturális tulajdonságait vizsgálhatjuk.

## 2. Definíciók és jelölések

Ebben a szakaszban leírjuk a későbbiekben használt legfontosabb definíciókat, jelöléseket. A feladatban használt súlyozott, irányított gráfot  $G(V, E, W)$ -vel jelöljük, ahol  $V$  a csúcsok halmaza,  $E$  az élek halmaza és  $W : E \rightarrow [0, 1]$  egy súlyfüggvény. A csúcsoknak azt a  $k$  elemű részhalmazát, amelyet a feladat szerint meg kell keresnünk, az angol nyelvű szakirodalmat követve, *seed halmaznak* nevezzük. A gráfnak azon csúcsait, amelyeket a befolyás terjedési modell elér, *aktív* vagy *fertőzött* csúcsoknak nevezzük. A továbbiakban először bemutatjuk a cikkünkben használt terjedési modellt, röviden leírjuk a mohó algoritmust [10], majd bevezetjük a LON építésre használt hegymászó-jellegű algoritmust.

### 2.1. Befolyás terjedési modell

Mint említettük, Kempe és szerzőtársai [10] két terjedési modellt vezettek be és vizsgáltak, amelyekből jelen cikkben csak az egyiket használjuk: a *független kaszkád* (independent cascade, IC) modellt. Ebben az iteráció alapú modellben a

gráf minden élének van egy paramétere  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ), amely az élen való terjedés valószínűségét jelzi. Egy iterációban a frissen fertőzött csúcsok megpróbálják aktivizálni a (ki)szomszédait az él paramétere szerint. Amennyiben egy  $v$  csúcs nem tudta fertőzni  $w$  szomszédját először, akkor nem fogja tudni később sem, csak egyszer próbálkozhat. Ha egyik aktív csúcs sem tud új csúcsot megfertőzni, akkor az iteráció véget ér.

A teljesség kedvéért ismertetjük az eredetileg Granovetter [8] által bevezetett LT modellt is. A modell azt valósítja meg, hogy egy közösségbeli egyén nagy valószínűséggel átvesz szokásokat vagy követ egy trendet, ha a vele kapcsolatban lévőket már megtették (csordaszellem jelenség). Minden csúcs bemenő élsúlyainak összege legfeljebb 1. Továbbá minden csúcshoz hozzárendelünk egy  $\theta \in [0, 1]$  *küszöbértéket*. Egy  $v \in V$  csúcs fertőzött lesz, ha a belé mutató fertőzött csúcsok éleinek súlyösszege nagyobb, mint a csúcs  $\theta$  értéke.

Mivel az IC és az LT modellek tartalmazznak sztochasztikus paramétereket, amely az ismeretlen hatásokat testesíti meg, így a kiértékeléséhez szükséges  $R$ -szer megismételni a szimulációt, majd a kapott értékek átlagát venni.

Az időbeli hatékonyságért az IC modellt nem az eredetileg megfogalmazott módon számítottuk, hanem a Hajdu és szerzőtársai [9] által javasolt változatot követve készítettünk egy implementációt. Készítünk  $R$  darab másolatot az eredeti  $G$  gráfról. Az él súlyait valószínűségeként alkalmazzuk. Másolatonként minden csúcsból fertőzést szimulálunk a szomszédokba. Ha a fertőzés egy másolatban nem tudott az élen átjutni, akkor az élet abban a gráfban töröljük. Ha ki akarunk értékelni egy seed halmazt, akkor csak gráfkereső algoritmusokat (mélységi vagy szélességi keresőt) kell indítanunk a seed halmaz minden csúcsából minden másolat gráfban, majd összeszámolni (multiplicitás nélkül) hány különböző csúcsot értek el egy gráfon belül és venni az átlagát ezen értékeknek. Ez tehát a várható (befolyás) értéke a seed halmaznak. Az  $R$  határozza meg a pontosságát ennek a várható értéknek. Ezen másolat gráfokat megtarthatjuk a többi kiértékeléshez is, nem kell újakat generálni.

## 2.2. Mohó algoritmus

Mivel a befolyás terjedés maximalizálás feladata az IC terjedési modell mellett szubmoduláris [10], ezért egy mohó algoritmus az optimális megoldás approximációját  $1 - 1/e$  faktorral megadja. Ebben a kontextusban az algoritmus kezdetben készít egy  $S$  üres halmazt, beállítja a  $k = 1$ -et és megoldja a problémát. A legjobb értékű csúcsot, a megoldást, behelyezi az  $S$ -be. Ezután növeli a seed halmaz lehetséges méretet eggyel és kiértékeli az összes  $S \cup v$  ( $v \in V \setminus S$ ) seed halmazt. A legjobb értékhez tartozó  $v$  csúcsot  $S$ -be helyezi. Addig ismétlődik ez, míg  $S$  mérete el nem éri az eredeti problémában megadott  $k$  elemszámot.

### 2.3. Egy hegymászó-jellegű algoritmus

Az imént tárgyalt mohó algoritmusban nem definiálható a lokális optimum fogalma. Ezért bevezetünk egy – az eredeti feladat megoldására alkalmas, de jelen cikkben nem arra használt – optimalizáló eljárást, amely jellegéből adódóan egy hegymászó algoritmus.

Az eljárás első lépésként egy adott (véletlenszerűen vagy más módon választott)  $S$  seed halmazból kezdi a keresést. A második lépésben kiértékeli az aktuális seed halmazt, választ véletlenszerűen az  $S$  halmazból egy csúcsot és azt leváltja az egyik (be)szomszédjára, amely jelenleg nem eleme  $S$ -nek. Ha az így kapott új  $\hat{S}$  seed halmaz értéke jobb, mint az előző, akkor megtartjuk, azaz legyen  $S := \hat{S}$  és ismételjük a második lépést. Ha nem, akkor visszatérünk a  $S$  seed halmazra és keresünk egy új, megfelelő szomszéd csúcsot, amellyel elvégezzük a kiértékelést és lehetséges cserét ugyanúgy, mint az előbb. Amennyiben a seed minden lehetséges szomszédjaiból alkotott kombinációt bejártuk és egyik sem rendelkezik nagyobb befolyásértékkel, akkor a seed halmazt *lokális optimumnak* nevezzük. Ebben az esetben a hegymászó eljárásunk véletlenszerűen választ egy elemet a seed halmazból és lecseréli egy csúcsra (nem feltétlen szomszédra) a gráfból, amely nem szerepel benne. Ezen csere után az elejétől ismételjük az algoritmust.

Minden kiértékelést (seed elemeket és befolyásértéket) bejegyzünk egy táblázatba a hozzátartozó lokális optimummal (utólagosan), amelybe az algoritmus eljutott a szomszédokra való lépésekkel. Amennyiben egy már látott seed halmazzal lép (ezt a táblázatból tudjuk), akkor nem számoljuk ki újra a befolyásértéket, csak kikeressük a hozzá tartozó lokális optimumot. Amennyiben nincs hozzá bejegyezve, mert rosszabb értékkel rendelkezett és nem rajta keresztül lépett tovább, illetve amennyiben kört alkotva visszajutott, akkor csak a befolyásértéket adjuk vissza. A befolyásérték számítása determinisztikus, mivel változatlanul a rögzített  $R$  darab másolat gráfon hajtódna végre. Az eljárás ilyen módon történő determinizálása csökkenti a számításigényt. Minden látogatott seed halmazt legfeljebb egy lokális optimumhoz rendelünk, mely a szomszédságban lévő seed halmazok befolyásértékétől függ.

Mint azt említettük, tehát az egyik fő különbség a mohó eljárás és az imént definiált hegymászó-jellegű módszer között, hogy az utóbbival definiálhatunk lokálisan optimális megoldásokat a problémában. Ez a lehetőség vezet minket a következő fejezethez, amiben tárgyaljuk hogyan lehet hálózatot építeni a lokális optimumokból.

## 3. Lokális Optimumok Hálózata - LON

Az imént bevezetett hegymászó-jellegű algoritmus végrehajtása során kaphatunk olyan csúcs halmazokat, amelyek lokális optimumként értelmezhetők. Ezen lokális optimumokból készítünk egy gráfot, a lokális optimumok hálózatát (Local

Optima Network, LON). A LON közelítéseket vizsgálták folytonos [15] és kombinatorikus optimalizálási problémákban [5]. A befolyás terjedés maximalizálás az utóbbihoz tartozik, habár alkalmaztunk néhány változtatást és új definíciókat vezettünk be. Minden, a hegymászó által megtalált lokális optimum egy csúcs a LON-ban. Két csúcs között él helyezkedik el, ha a kereső algoritmus egymás után talált rájuk: egy lokális optimumból kilépve (egy elemet lecserélve) eljutott a másik lokális optimumba. Ez egyben irányítást is ad a LON-ban. Mivel a hegymászó képes a LON már meglévő élein többször is áthaladni az építés alatt, ezért a LON súlyozott gráf.

**Megállási feltételek.** A LON gráf építése tulajdonképpen tetszőleges ideig tarthat. Definálni kell megállási feltételeket. Ha az építés elegendő hosszú ideje fut, akkor megfigyelhetjük, hogy egyes csúcsok befoka számottevően nagyobb a többinél. Olyan megállási feltételeket próbáltunk alkalmazni, melyekkel a LON-ban megjelennek kiemelkedő élsúlyok. Ezen feltételek a következők:

- azon pontok száma meghaladja a  $\theta_v$  értéket, melyek bemenő élek számának  $\theta_e$  szorosa kisebb a csúcshoz tartozó élsúlyok összegénél;
- a felderített pontok száma (amelyet ismerünk a nyilvántartáshoz alkalmazott táblázatból) meghaladja az összes lehetséges seed kombinációk számának  $\theta_M$ -szeresét;
- ha a LON csúcsainak száma az eredeti  $G$  csúcsainak számának kétszeresénél több;
- a LON-ban megjelenő maximális élsúly nagyobb, mint a  $G$  éleinek számának negyede;

Kitétel ezen feltételek mellett, hogy az első feltételben említett megfelelő csúcsok száma több legyen mint 10.

**$H$  gráfok.** A LON-ban a befok jellemzi egy lokális optimum vonzáskörzetét. Mivel több olyan pont van, melyekre csak a sztochasztikus lépések vezettek, de ritkán, így ezen valószínűtlen, érdektelen pontokat töröljük a LON-ból. Későbbiekben nevezzük ezt a szűrt hálózatot  $H$ -nak. A szűrés során az élsúlyokat vizsgáljuk a következő módon. Az 1 súlyú élektől kezdjük. Amennyiben az adott súlyú élek egymás utáni törlésével 2-nél nagyobb méretű komponensek jelennek meg, akkor nem hajtjuk végre ezen élek törlését és abbahagyjuk a szűrést. Ha a törlésekkel nem vágtunk le nagyobb komponenst, akkor növeljük a súlyértéket, amely szerint törlünk.

#### 4. Numerikus kísérletek

Ebben a szakaszban bemutatunk néhány olyan jellegű elemzést, amely a fentiekben leírt módszerek alapján készült lokális optimumok hálózataira vonatkozik. Célunk tehát, hogy a befolyás terjedés maximalizálás probléma keresési terének értékkészletére adjunk jellemzést.

A kísérletek elvégzéséhez mesterségesen generált (szintetikus) véletlen hálózatokat használtunk. Három típust vizsgáltunk:

- Watts-Strogatz (WS) hálózatokat, amelyeket kisvilág gráfoknak is nevezünk [16]
- Barabási-Albert (BA) hálózatokat, amelyek építéséhez a preferenciális kapcsolódás mechanizmust használjuk, ahol a már magas foksámú csúcsok nagyobb eséllyel kapnak újabb éleket [2];
- Cooper-Frieze (CF) hálózatokat, amelyek a web gráfok növekedési mechanizmusát hivatottak modellezni [4].

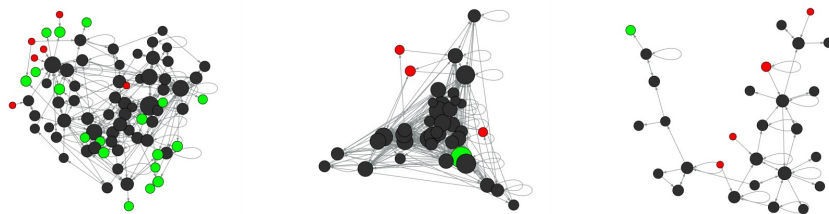
Ezekből a gráfokból több példányt is készítettünk, különböző csúcs- és élszámmal. Kísérletezéseink során azonban arra jutottunk, hogy az  $n = 120$  csúcsszámú input gráfokkal kaptunk olyan eredményeket, amelyekben a lokális optimumok hálózatain az élsúlyok nagyobbak voltak 1-nél. Így végül ezekből a gráfokból válogattunk ki olyan eredményeket, amelyek jól reprezentálják az egyes típusokon kapott eredményeket. Az így kiválogatott gráfok élszámai rendre 960, 474, és 622 voltak a WS, BA és CF hálózatok esetén. Az input gráfok éleihez a súlyokat a  $(0, 0, 7]$  intervallumon egyenletes eloszlású véletlenszám generátorral rendeltük hozzá.

A futtatásokat a  $k = 2$  seed halmaz méretre végeztünk el, a megállási feltételek (lásd 3. szakasz) pedig a következők voltak:  $\theta_v = \sqrt{|V(G)|}$ ,  $\theta_e = 2$ , és  $\theta_M = 0, 6$ .

##### 4.1. $H$ gráfok vizsgálata

A 2.3. szakaszban bevezetett hegymászó-jellegű eljárás futtatásával kapott lokális optimumok hálózataiból a 3. szakaszban ismertetett szűrési eljárással kapjuk meg a  $H$  gráfokat. A három különböző input gráftípusból válogatott inputokra kapott  $H$  gráfokat az 1. ábrán láthatjuk<sup>1</sup>. A  $H$  gráfok csúcsainak mérete az adott csúcs befokával egyenesen arányos, míg a színek a hamarosan bevezetendő és használt közelségi központiség értékeket reprezentálják. Ezekről az ábrákról egyelőre annyi megállapítható, hogy a három különböző input gráfra három különböző szűrt lokális optimumok hálózatát kaptuk, amely azonnal sugallja a befolyás terjedés maximalizálás feladat diverz jellegű viselkedését.

<sup>1</sup>Szeretnénk hangsúlyozni, hogy itt nem az eredeti  $G$  input gráfok vizualizációit láthatjuk.



(a) Watts-Strogatz

(b) Barabási-Albert

(c) Cooper-Frieze

1. ábra. Lokális optimumok hálózata, szűrt változatok ( $H$  gráfok)

A 2. ábrán az egyes  $H$  gráfok behatóbb elemzését láthatjuk. A vizsgálati módszer lehetővé teszi, hogy rálátást szerezzünk az egyes lokális optimumok vonzásokörzeteiről. Ehhez a hálózatkutatásban használt közelségi központosság (closeness centrality) fogalmát használtuk. Ennek kiszámítása a

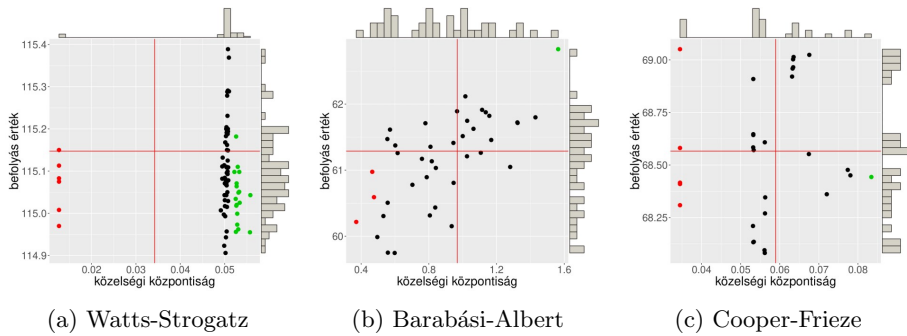
$$C(u) = \frac{n - 1}{\sum_{v \in V(H)} d(v, u)}$$

képlettel határozható meg, ahol  $n$  a csúcsok száma  $H$ -ban,  $d(v, u)$  pedig a  $v$ -ből  $u$ -ba menő irányított legrövidebb út hossza<sup>2</sup>. Az ábrákon pirossal a  $C$  értékek alsó 10 percentilisébe, zölddel pedig a felső 10 percentilisébe eső csúcsokat színeztük, a többi csúcs pedig feketével van feltüntetve. Ezt a színezést tartottuk meg egyben az 1. és 4. ábrákon is egyaránt.

A 2. ábrán tehát a  $H$  gráf csúcsainak közelségi központossági értékei és a befolyás értékük közötti összefüggést vizsgálhatjuk. Emlékeztetőül, a  $H$  gráf csúcsai az eredeti  $G$  input gráf (jelen példákban  $k = 2$  elemű) csúcshalmazai. Ez az elemzés lehetővé teszi, hogy egy adott input gráfot megoldhatóság szerint kategorizáljuk könnyűnek vagy nehéznek. A magas befolyásérték jelzi a legjobb talált megoldáshoz való közelséget. Az alacsony  $C$  érték jelenti, hogy az adott pont nehezebben volt elérhető a hegymászó algoritmussal. Amennyiben a pontok többsége magas befolyás értékkel és magas  $C$  értékkel rendelkezik, akkor azt a feladatot könnyűnek nevezhetjük.

Mindhárom input gráfra jellemző, hogy a talált lokális optimumok értékben egymástól kevésben különböznek. A kérdés csak az, hogy vajon ezek mennyire esnek távolra egymástól?

<sup>2</sup>A  $d$  kiszámításánál az élek súlyainak reciprokát használtuk, követve így azt a konvenciót, hogy magasabb  $C$  érték jelenti azt, hogy az adott csúcs átlagosan közelebb van a többi csúcsához.



2. ábra. Közelégi központosság értékek a  $H$  gráfokban

A 2a. ábra alapján a vizsgált Watts-Strogatz gráf számos nagyon magas értékű seed halmazt tartalmaz, amelyek közül a legmagasabb befolyás értéket elérő egyben magas  $C$  értékkel is rendelkezik, ezért annak megtalálása viszonylag könnyű. Ugyanakkor láthatjuk, hogy van egy másik régió is, alacsonyabb fertőzés értéket eredményező és egyben nehezebben elérhető seed halmazokkal.

A 2b. ábra az előzőtől különbözik abban, hogy a közelégi központossági értékek nagyjából egyenletesen oszlanak el. Ez az értékkészletben történő egyenletes szétterülésükre utal. A legmagasabb befolyás értékkel rendelkező seed halmaz egyben a legmagasabb  $C$  értékkel is rendelkezik, így ennek megtalálására a hegymászó algoritmusnak jó esélye van.

A 2c. ábra a másik két ábrától annyiban különbözik, hogy több, befolyás értékben minimálisan különböző, a legjobb megoldáshoz közeli seed halmaz jelenlétét mutatja. Ezek közül az abszolút legjobb értékű egyben a legnehezebben elérhető is.

#### 4.2. Csúcsalmazok egy távolsága: $VSD$

A keresés során alkalmas seed halmazok megtalálása a cél. Ahhoz, hogy az így megtalált halmazok közötti összefüggéseket vizsgáljuk, bevezetünk egy csúcsalmazok távolságának kifejezésére alkalmas mértéket, amelyet  $VSD$ -vel (*Vertex Set Distance*) jelölünk. Legyenek  $V_1$  és  $V_2$  a  $G$  gráf csúcsalmazának  $k$ -elemű részalmazai. Legyen

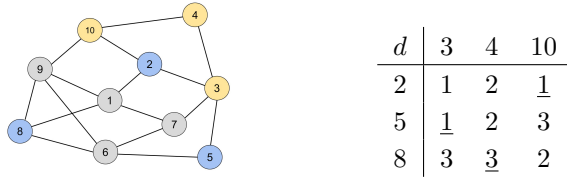
$$VSD(V_1, V_2) = \min_{\pi \in S_k} \left( \sum_{i=1}^k d(V_{1_i}, V_{2_{\pi(i)}}) \right),$$

ahol  $d : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ , a gráfon vett távolság, és  $S_k$  az első  $k$  természetes számhoz tartozó permutációk halmaza.

Annak a formális bizonyítását, hogy az így definiált  $VSD$  valóban távolság fogalom, a függelékben találja az olvasó.



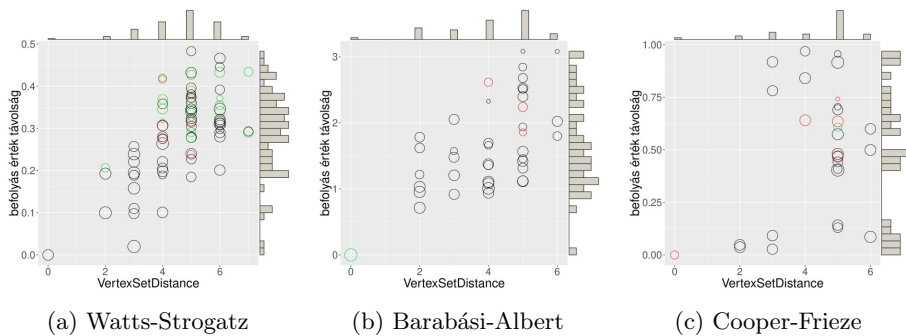
A  $VSD$  kiszámítását úgy végezzük, hogy egy hozzárendelési feladatként értelmezzük a problémát. Az egyik seed halmaz elemeit szeretnénk hozzárendelni a másik seed halmaz elemeihez. A költségek mátrixa az eredeti  $G$  gráf súly nélküli változatából számított távolság részmatrix lesz, amely csak az érintett elemekhez kapcsolódó értékekből áll. Az irányítottságtól eltekinthetünk, mert minden élhez létezik annak ellenkező irányú párja. A megoldás értéke lesz a  $VSD$ .



3. ábra.  $VSD$  kiszámítása hozzárendelési feladatként

**4.2.1. Példa.** Egy könnyen áttekinthető példát a 3. ábrán láthatunk, ahol  $G$  egy 10 csúcsból álló gráf, a két csúcshalmaz pedig  $S_1 = \{2, 5, 8\}$  (az ábrán kék színnel jelölve) és  $S_2 = \{3, 4, 10\}$  (az ábrán sárga színnel jelölve). A kapcsolódó hozzárendelési feladatot a jobb oldali táblázat írja le, amiből a  $VSD(S_1, S_2) = 5$  megoldás adódik.

Az így bevezetett  $VSD$  távolság mértéket használhatjuk annak a kiemzésére, hogy a megtalált lokális optimumok közül a legmagasabb értékűhöz viszonyítva a többiek ( $VSD$  értelemben) milyen távol helyezkednek el az eredeti  $G$  gráfban. Ezeket az értékeket a legjobb megoldás befolyás értékétől vett távolsággal vetjük össze.



4. ábra.  $VSD$  értékek a  $G$  input gráfokon

A 4. ábrán a három input gráfra kapott eredményeket láthatjuk. A körök mérete az adott seed halmaz *vonzáskörzetével* arányos: a hegymászó, mint lokális optimalizáló futtatása során hányszor jutottunk egy lokális optimumba. Az origóban tehát az adott  $G$  gráfban talált legjobb megoldás helyezkedik el, a távolságokat ehhez a seed halmazhoz viszonyítjuk. A 4b. ábra szerint a BA hálózat (ezen példányának) értelmezési tartománya ún. *big valley* szerkezetű [3], amelyben a lehetséges megoldások a globális/legjobb megoldástól vett távolságai (esetünkben: a  $VSD$  értékek) és az ezekhez tartozó függvényértékek között erős a korreláció. A globális optimumot ugyan körbeveszik a lokális optimumok, ezek azonban mind egyre rosszabb értékűek, ahogy távolodunk a legjobb megoldástól. Ehhez hasonló a 4a. ábrán látható WS hálózat is, bár abban találtunk egy, a legjobb megoldáshoz nagyon közeli befolyás értékű seed halmazt is. Végül a 4c. ábrán újra igazolást nyer a CF hálózatok a másik két típustól vett különbözősége, hiszen itt összesen hét darab magas értékű lokális optimumot találtunk, amelyek az egyébként nehezen megtalálható (erre a piros színezés utal) legjobb megoldástól,  $VSD$  értelemben, egyre távolabb helyezkednek el.

## 5. Konklúzió

A szakirodalomban sok szempontból vizsgált, erősen alkalmazás orientált problémát, a gráfokon értelmezett befolyás terjedés maximalizálás megoldásainak tulajdonságait vizsgáltuk. Megközelítésünk újdonságát az adta, hogy a felhasznált hegymászó-jellegű algoritmussal a keresési tér olyan leképezését vizsgáltuk, amely lehetővé teszi a feladat strukturális tulajdonságainak mélyebb megértését. Ehhez felhasználtuk a lokális optimumok hálózatának (LON) fogalmát. Ennek segítségével három, szerkezetileg különböző véletlen gráfon, mint inputon kimutattuk, hogy a probléma különböző értékkészlet struktúrákhoz vezet. Az így kapott eredmények lehetőséget adnak célzott keresési eljárások definiálására, ennek részletes kidolgozását jövőbeli kutatási tervként jelöljük ki.

## Függelék

Megmutatjuk, hogy a 4.2. szakaszban bevezetett  $VSD$  függvény nemnegatív, szimmetrikus és teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget, azaz valóban távolság fogalom.

A  $VSD$  irányítatlan gráfokon értelmezett legrövidebb utakon alapszik, ami szimmetrikus. Az eredeti  $G$  gráf irányított, de minden élnek van párja az ellenkező irányba és a súlyok figyelmen kívül voltak hagyva (gráf távolság mindkét irányba megegyezik). Gráfbeli távolságok összege független a tagok sorrendjétől, ezért  $VSD$  szimmetrikus, azaz  $VSD(V_1, V_2) = VSD(V_2, V_1)$  teljesül.

Ahogy előzőleg említettük, gráf távolságon alapszik, amelyek értéke mindig nemnegatív. Ezen nemnegatív számok összege is nem negatív. Legyen  $V_1, V_2$  a  $G$

gráf csúcsaiból álló,  $k$  különböző elemeket tartalmazó halmazok. A  $VSD(V_1, V_2) = 0$  akkor és csakis akkor, ha  $V_1 = V_2$ . Ekkor minden  $V_1$  beli elem 0 távolságra van a  $V_2$ -beli megfelelőjétől (önmagától), a lehetséges úthosszak összegeinek minimuma pedig 0. Ha  $V_1$  és  $V_2$  egy elemben is térnek el, akkor legalább egy 0-nál hosszabb útnak kell lennie az elemek között, a  $VSD$  értéke nagyobb lesz 0-nál, amivel a nemnegativitást beláttuk.

Végül, a háromszög egyenlőtlenséghez a

$$VSD(V_1, V_2) \leq VSD(V_1, V_3) + VSD(V_2, V_3)$$

egyenlőtlenségnek teljesülnie kell  $V(G)$  bármely  $k$  elemű  $V_1, V_2, V_3$  részhalmazára. Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy

$$VSD(V_1, V_2) > VSD(V_1, V_3) + VSD(V_2, V_3).$$

Mivel  $VSD$  szimmetrikus, ezért a  $VSD(V_1, V_2) > VSD(V_1, V_3) + VSD(V_3, V_2)$  egyenlőtlenség is teljesül. Tudjuk, hogy  $VSD(V_1, V_3)$  megegyezik a megfelelő hozzárendelési feladat minimális költségű megoldásának értékével. Ez igaz a  $V_3, V_2$  közötti  $VSD$  értékre is. Ekkor vannak utak a  $V_1$  és  $V_2$  elemei között (legalább a  $V_3$  elemeit érintők). Ezen utakból szerkesztett egy hozzárendelési feladat optimális megoldásának értéke legyen  $D$ . Meghatározott csúcsok érintésével nem csökkennek a távolságok, ezáltal  $D$  sem csökkenhet, ha a közvetlen legrövidebb utak helyett másokat használunk. Vagyis, ha  $D$  a legrövidebb utakból szerkesztett feladat megoldása, akkor  $D \leq VSD(V_1, V_3) + VSD(V_3, V_2)$ . Ugyanakkor  $D = VSD(V_1, V_2)$ , aminek nagyobbának kell lennie a két előző  $VSD$  érték összegénél, amely ellentmondás.

### Köszönetnyilvánítás

Jelen kutatás eredményei az „Integrált kutatói utánpótlás-képzési program az informatika és számítástudomány diszciplináris területein” című, EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-0002 számú projekt, valamint a TUDFO/47138-1/2019-ITM számú projekt támogatásaival készültek.

### Hivatkozások

- [1] AGGARWAL, C.C., LIN, S. AND PHILIP, S.Y.: *On influential node discovery in dynamic social networks*, In: Proceedings of the 2012 SIAM International Conference on Data Mining, pp. 636-647. SIAM (2012). DOI: [10.1137/1.9781611972825.55](https://doi.org/10.1137/1.9781611972825.55)
- [2] ALBERT, R. AND BARABÁSI, A.L.: *Statistical mechanics of complex networks*, Reviews of Modern Physics, Vol. **74** No. **1**, pp. 47-97 (2002). DOI: [10.1103/RevModPhys.74.47](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.47)

- [3] MORITA, M., OCHIAI, H., TAMURA, K. AND YASUDA, K.: *Multi-point search combinatorial optimization method based on neighborhood search using evaluation of big valley structure*, In IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, pp. 2835-2840 (2015). DOI: [10.1109/SMC.2015.494](https://doi.org/10.1109/SMC.2015.494)
- [4] COOPER, C. AND FRIEZE, A.: *A general model of web graphs*, Random Structures & Algorithms 22, pp. 311-335 (2003). DOI: [10.1002/rsa.10084](https://doi.org/10.1002/rsa.10084)
- [5] DAOLIO, F., TOMASSINI, M., VÉREL, S. AND OCHOA, G.: *Communities of Minima in Local Optima Networks of Combinatorial Spaces*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier, Vol. **390** No. **9**, pp. 1684-1694 (2011). DOI: [10.1016/j.physa.2011.01.005](https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.01.005)
- [6] DOMINGOS, P. AND RICHARDSON, M.: *Mining the Network Value of Customers*, In Proceedings of 7th International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, pp. 57-66, (2001). DOI: [10.1145/502512.502525](https://doi.org/10.1145/502512.502525)
- [7] GOYAL, A., LU, W. AND LAKSHMANAN, L. V. S.: *CELF++: Optimizing the greedy algorithm for influence maximization in social networks*, In: Proceedings of the 20th International Conference Companion on World Wide Web., pp. 47-48 (2011). DOI: [10.1145/1963192.1963217](https://doi.org/10.1145/1963192.1963217)
- [8] GRANOVETTER, M.: *Threshold models of collective behavior*, American Journal of Sociology, Vol. **83** No. **6**, 1420-1443 (1978). DOI: [10.1086/226707](https://doi.org/10.1086/226707)
- [9] HAJDU, L., KRÉSZ, M. AND BÓTA, A.: *Community based influence maximization in the Independent Cascade model*, Federated Conference on Computer Science and Information Systems (FedCSIS), IEEE, (2018). DOI: [10.15439/2018F201](https://doi.org/10.15439/2018F201)
- [10] KEMPE, D., KLEINBERG, J. AND TARDOS, É.: *Maximizing the spread of influence through a social network*, Proceedings of the 9th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. ACM (2003). DOI: [10.1145/956750.956769](https://doi.org/10.1145/956750.956769)
- [11] LEE, J.R. AND CHUNG, C.W.: *A fast approximation for influence maximization in large social networks*, In: Proceedings of the 23rd International Conference on World Wide Web Companion, pp. 1157-1162, (2014). DOI: [10.1145/2567948.2580063](https://doi.org/10.1145/2567948.2580063)
- [12] LESKOVEC, J., KRAUSE, A., GUESTRIN, C., FALOUTSOS, C., VANBRIESEN, J. AND GLANCE, N.: *Cost-effective outbreak detection in networks*, In: Proceedings of the 13th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, pp. 420-429 (2007). DOI: [10.1145/1281192.1281239](https://doi.org/10.1145/1281192.1281239)
- [13] NEMHAUSER, G., AND WOLSEY, L. AND FISHER, M.: *An analysis of the approximations for maximizing submodular set functions*, Mathematical Programming, Vol. **14**, pp. 265-294 (1978). DOI: [10.1007/BF01588971](https://doi.org/10.1007/BF01588971)
- [14] RAHIMKHANI, K., ALEAHMAD, A., RAHGOZAR, M. AND MOEINI, A.: *A fast algorithm for finding most influential people based on the linear threshold model*, Expert Systems with Applications, Vol. **42** No. **3**, pp. 1353-1361 (2015). DOI: [10.1016/j.eswa.2014.09.037](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2014.09.037)
- [15] VINKÓ, T. AND GELLE, K.: *Basin Hopping Networks of Continuous Global Optimization Problems*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **25**, pp. 985-1006 (2017). DOI: [10.1007/s10100-017-0480-0](https://doi.org/10.1007/s10100-017-0480-0)
- [16] WATTS, D.J. AND STROGATZ, S.H.: *Collective dynamics of ‘small-world’ networks*, Nature, Vol. **393** No. **6684**, pp. 440-442 (1998). DOI: [10.1038/30918](https://doi.org/10.1038/30918)



Homolya Viktor programtervező informatikus diplomáját a Szegedi Tudományegyetemen szerezte. 2018 óta az SZTE Számítógépes Optimalizálás Tanszékén doktorandusz, ahol a kutatómunka mellett aktívan részt vesz az oktatási feladatok elvégzésében is. Kutatási területe az optimalizálási módszerek és feladatok elemzése a hálózattudomány eszközeivel.

#### HOMOLYA VIKTOR

Szegedi Tudományegyetem, Informatikai Intézet,  
Számítógépes Optimalizálás Tanszék  
homolyav@inf.u-szeged.hu



Vinkó Tamás programtervező matematikus, habilitált egyetemi docens. Diplomáját és fokozatait a Szegedi Tudományegyetemen szerezte. Posztdoktori kutatóként több mint 6 évet töltött Hollandiában az Európai Űrügynökségnél és a Delfti Műszaki Egyetemen. Kutatómunkájában a hálózattudomány és az optimalizálás határterületeit vizsgálja.

#### VINKÓ TAMÁS

Szegedi Tudományegyetem, Informatikai Intézet,  
Számítógépes Optimalizálás Tanszék  
tvinko@inf.u-szeged.hu

### ON THE OPTIMA NETWORKS OF INFLUENCE MAXIMIZATION

VIKTOR HOMOLYA, TAMÁS VINKÓ

The influence maximization problem is investigated from a new perspective. A hill-climber algorithm is introduced for the purpose of detecting local optima and their relationships in this discrete optimization problem. The proposed method is demonstrated by exploring the target set of the search space resulted from computational experiments on structurally different random graphs.

## TECHNIKAI HALADÁS A KÖZEPES FEJLETTSÉG CSAPDÁJÁBAN

BESSENYEI ISTVÁN

Azt vizsgáljuk, hogy egy kevésbé fejlett gazdaság miként kerülhet ki a közepes fejlettség csapdájából, s juthat el a fejlett gazdaságokra jellemző, stabil növekedési pályára. A termelési lehetőségek modellezéséhez mindenkéltét megkonstruálunk egy a csapdahelyzet megjelenítésére alkalmas termelési függvényt. Bevezetve ezt a neoklasszikus növekedési modellbe, számba vesszük a csapdahelyzetből történő kikerülést akadályozó tényezőket. Szakítva a főáramú közgazdaságtannal, szemügyre vesszük, hogy a bevezetett termelési függvény miként alapozható meg a lineáris tevékenységelemzés modelljében. Ezáltal lehetővé válik annak tisztázása, hogy milyen jellegű technikai haladás vezet ki a növekvő gazdaságot a közepes fejlettség csapdájából. A cikk legfontosabb eredménye annak megmutatása, hogy a csapdahelyzetből való kikerüléshez nem a legfejlettebb gazdaságokban alkalmazott termelési technológiák fejlesztésére van szükség, hanem azon kevésbé korszerű termelési alapeljárásokat kell fejleszteni, melyek elérését a közepes fejlettség csapdájában működő vállalatok számára a mindenkor rendelkezésre álló beruházási források reálisan lehetővé teszik.

### 1. Gazdasági növekedés és a közepes fejlettség csapdája a neoklasszikus alapmodellben

Jelölje  $Y$  a GDP nagyságát,  $K$  a termelés rendelkezésére álló tőke,  $L$  pedig a munka mennyiségét! Ezek időben változó, rendszerint növekvő nagyságok. Azt a tényt azonban, hogy ezek az idő függvényei, az egyszerűbb írásmód érdekében, általában nem jelöljük. Ekkor a gazdaság rendelkezésére álló termelési technológiát az  $Y = F(K, L)$  termelési függvény írja le. Reális és a főáramú közgazdaságtannal megegyező feltevés, hogy  $\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$  és  $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ . A neoklasszikus alapmodell fölteszi továbbá, hogy a GDP konstans,  $s$  hányada kerül megtakarításra, és minden megtakarítás automatikusan beruházássá válik, azaz a tőkeállományt növeli. Ekkor a tőke mozgásegyenlete:  $\dot{K} = \frac{dK}{dt} = s \cdot Y - \delta \cdot K$ , ahol  $\delta$  a tőkejavak amortizációs rátája. Feltesszük továbbá, hogy a gazdaság rendelkezésére álló

munka mennyisége demográfiai tényezők által meghatározott  $\gamma$  exogén konstans ráta szerint növekszik, azaz  $\hat{L} = \frac{\dot{L}}{L} = \gamma$ .<sup>1</sup>

Követve a főáramú közgazdaságtant feltesszük, hogy a technikai haladás a munka hatékonyságát növeli, ezért bevezetjük a hatékonysági egységekben mért munka jelölésére az  $\bar{L}$  szimbólumot. Feltesszük azt is, hogy a technikai haladás a gazdaság egyéb történéseitől független, exogén folyamat, mely a munka hatékonyságát  $\mu$  konstans ráta szerint növeli, így  $\gamma = 0$  esetén  $\hat{\bar{L}} = \mu > 0$ . Ha  $\mu > 0$ , akkor a termelési technológiát az  $Y = F(K, \bar{L})$  termelési függvénnyel írjuk le. Vegyük észre, hogy amennyiben  $\dot{K} = 0$  és  $\dot{\bar{L}} = 0$ , akkor  $\mu > 0 \Rightarrow \dot{Y} > 0$ .

Gyakran definiálják a technikai haladást a fenti észrevétel felhasználásával úgy, hogy változatlan tőke és munkafelhasználás mellett nő a kibocsátás. Mi azonban ezt nem tesszük, mert a következő szakaszban egy másik definíciót adunk.

Bevezetünk egy olyan változót, melynek értéke az egyensúlyi növekedési pályán konstans:

*1.1. Definíció.* Hatékony tőkeintenzitásnak nevezzük a  $\bar{k} = K/\bar{L}$  hányadost.

Tovább követve a főáramú közgazdaságtant feltesszük, hogy az  $Y = F(K, \bar{L})$  függvény mindkét változójában lineárisan homogén, ekkor felírható a következő, intenzív forma:  $\bar{y} = \frac{Y}{\bar{L}} = F\left(\frac{K}{\bar{L}}, 1\right) = f(\bar{k})$ .

*1.1. TÉTEL.* (Solow [14]) A hatékony tőkeintenzitás mozgásegyenlete:

$$\dot{\bar{k}} = s \cdot f(\bar{k}) - (\mu + \gamma + \delta)\bar{k} \quad (1)$$

*1.2. Definíció.* Akkor mondjuk, hogy a gazdaság egyensúlyi növekedési pályán van, ha  $\dot{\bar{k}} = 0$ .

Legyen az egységnyi munkára eső kibocsátás, illetve tőke  $y = \frac{Y}{L}$ , illetve  $k = \frac{K}{L}$ , az életszínvonal indikátoraként is értelmezhető, egységnyi munkára eső fogyasztás pedig:  $c = \frac{(1-s)Y}{L} = \frac{C}{L}$ . Ekkor:

*1.1. KÖVETKEZMÉNY.* Egyensúlyi növekedési pályán  $\dot{Y} = \mu + \gamma$ , továbbá  $\dot{y} = \dot{k} = \dot{c} = \mu > 0$ .

Az utóbbi időben tapasztalható demográfiai folyamatok következtében számos gazdaságban  $\gamma < 0$  áll fenn. Ebből azonban csakis abban az esetben következik  $\dot{Y} \leq 0$ , ha az exogén technikai haladás nem elég gyors ütemű, azaz  $\mu \leq -\gamma$ . A gazdasági növekedés demográfiai folyamatok általi meghatározottságát  $\gamma$  és  $\mu$  endogenizálása mellett Jones [8] tanulmánya vizsgálja.

Az egyensúlyi növekedési pálya egzisztenciájának, unicitásának és stabilitásának vizsgálatához szükségünk lesz az alábbi definícióra:

<sup>1</sup>A változó fölé írt pont annak idő szerint vett deriváltját, a kalap pedig a növekedési rátáját jelenti.

1.3. *Definíció.* (Inada [7]) Akkor mondjuk, hogy az  $f(\bar{k})$  intenzív termelési függvény jól viselkedő, ha

1.  $\forall \bar{k} \geq 0 : f'(\bar{k}) > 0$  és  $f''(\bar{k}) < 0$ .
2.  $\lim_{\bar{k} \rightarrow \infty} f'(\bar{k}) = 0$  és  $\lim_{\bar{k} \rightarrow 0} f'(\bar{k}) = \infty$
3.  $f(0) = 0$  és  $\lim_{\bar{k} \rightarrow \infty} f(\bar{k}) = \infty$

1.2. *TÉTEL.* (Burmeister és Dobell [5]) Ha az  $f(\bar{k})$  intenzív termelési függvény jól viselkedő, akkor fennáll az egyensúlyi növekedési pálya egzisztenciája, unicitása és stabilitása<sup>2</sup>.

Könnyen ellenőrizhető, hogy  $0 < \alpha < 1$  esetén az

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot \bar{L}^{1-\alpha} \quad (2)$$

Cobb-Douglas típusú termelési függvényből levezethető  $\bar{y} = A \cdot \bar{k}^\alpha$  intenzív termelési függvény jól viselkedő. Ugyanakkor már Solow [14] cikke bemutatta az intenzív termelési függvény több olyan lehetséges formáját, melyek esetén az egyensúlyi növekedési pálya egzisztenciája, unicitása, vagy stabilitása nem áll fenn. Cikkünk szempontjából a több egyensúlyi növekedési pálya létezésének esete a legfontosabb.

1.4. *Definíció.* Ha a  $\bar{k}_1 < \bar{k}_2 < \dots < \bar{k}_m$  hatékony tőkeintenzitásokra az (1) differenciálegyenlet szerint  $\dot{\bar{k}} = 0$ , akkor a  $\bar{k}$  legalacsonyabb értékéhez tartozó, stabil növekedési pályát a közepes fejlettség csapdájának nevezzük.

1.2. *KÖVETKEZMÉNY.* A közepes fejlettség csapdájában  $\hat{y} = \mu > 0$  csakúgy, mint bármelyik másik egyensúlyi növekedési pályán. Csakhogy a közepes fejlettség csapdájába ragadt gazdaságban az egy főre eső GDP és fogyasztás alacsonyabb és a lemaradás szintén a technikai haladás rátája által meghatározott,  $\mu$  ütemben növekszik.

Megjegyzendő, hogy az elnevezés tekintetében az irodalom nem egységes. Erről tanúskodik például Nelson [11] cikke, mely a lehetséges okokat is részletesen vizsgálja, vagy az a tény, hogy Snowdon [15] szegénységi csapdának nevezi. Jelen tanulmány az elnevezést a Magyar Nemzeti Bank [10] Növekedési Jelentéséből vette át. E jelentés idézi Agénor és Canuto [1] cikkét, melyben a szerzők megmutatták, hogy a közepes fejlettség csapdája a neoklasszikus növekedési modellnél kifinomultabb együttélő nemzedékek modelljében is megjelenhet. Maradva az eddigiekben ismertetett modell keretei között, a (2) termelési függvényből kapott  $\bar{y} = A \cdot \bar{k}^\alpha$  intenzív termelési függvény helyett most egy olyan intenzív termelési függvényt

<sup>2</sup>Ebben a tanulmányban stabilitáson mindig lokális aszimptotikus stabilitást értünk.



vezetünk be, mely lehetővé teszi a közepes fejlettség csapdájának megjelenítését. Legyen ez az intenzív termelési függvény az alábbi:

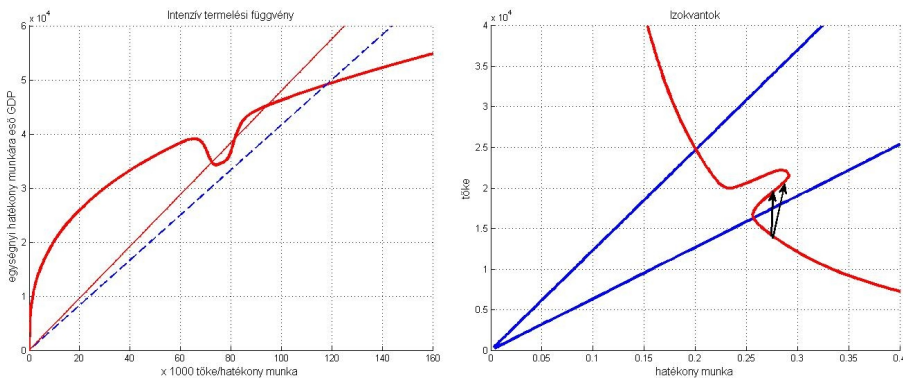
$$f(\bar{k}) = A \cdot \left[ \bar{k}^\alpha - \frac{b}{c + (d \cdot \bar{k} - \bar{k}_0)^{2n}} \right], \quad (3)$$

ahol  $b, c, d, \bar{k}_0 > 0$  paraméterek, és  $n$  természetes szám. Könnyű látni, hogy  $b \rightarrow 0$  esetén a (3) függvény a (2)-ből adódó  $\bar{y} = A \cdot \bar{k}^\alpha$  formához tart, és ugyanaz a helyzet, ha  $\left| \bar{k} - \frac{\bar{k}_0}{d} \right| \rightarrow \infty$ . Utóbbi esetben a konvergencia annál gyorsabb, minél nagyobb  $n$ .

Az (1) differenciálegyenletbe  $\hat{\bar{k}} = 0$ -t helyettesítve kapjuk, hogy egyensúlyi növekedési pályán az

$$f(\bar{k}) = \frac{\mu + \gamma + \delta}{s} \bar{k} = g(\bar{k}) \quad (4)$$

egyenlőségnek kell fennállnia, ahol a lineáris  $g(\bar{k})$  függvényt csupán az egyszerűbb hivatkozás érdekében vezettük be. Az 1.2. tétel szerint az  $f(\bar{k}) = A \cdot \bar{k}^\alpha$  intenzív termelési függvény jól viselkedő volta biztosítja az egyensúlyi növekedési pálya egzisztenciáját, unicitását és stabilitását. A (3) intenzív termelési függvény bevezetése esetén azonban nem teljesül az 1.3. definícióban adott 1. feltétel, így az egyensúlyi növekedési pálya unicitása nem biztosított. Ezt mutatja be az 1. ábra bal oldala, ahol a (4) egyensúlyi feltétel bal oldalán álló (3) intenzív termelési függvényt és a jobb oldalon álló, lineáris  $g(\bar{k})$  függvényt tüntettük fel. Utóbbi szaggatott vonallal a fejlettebb gazdaságokra jellemző magasabb megtakarítási hányad mellett, folytonos vonallal pedig  $s$  kevésbé fejlett gazdaságokra jellemző, alacsonyabb értéke esetén.



1. ábra

Tekintsük most azt, az ábra bal oldalán bemutatott esetet, amikor a (4) feltétel a hatékony tőkeintenzitás  $\bar{k}_1 < \bar{k}_2 < \bar{k}_3$  értékei mellett teljesül! Az (1) differenciálegyenletből következik, hogy ha  $f(\bar{k}) > g(\bar{k})$ , akkor  $\bar{k}$  növekszik, ellenkező esetben csökken. Így a  $\bar{k}_1$  melletti, stabil fixponthoz tartozó egyensúlyi pályán növekvő gazdaság a közepes fejlettség csapdájában van. Az ábrán a meredekebb egyenes és az  $f(\bar{k})$  függvény paramétereinek kalibrálása során egy a közepes fejlettség csapdájában lévő (magyar) és egy fejlettebb, (osztrák) gazdaságra jellemző értékeket vettünk alapul. Ennek megfelelően a  $(\bar{k}_1, f(\bar{k}_1))$  értékek a közepes fejlettség csapdájában lévő, míg a  $(\bar{k}_3, f(\bar{k}_3))$  értékek a fejlettebb gazdaság egyensúlyi növekedési pályáját határozzák meg (Pl:  $y_3(t) = f(\bar{k}_3)e^{\mu t}$ ). Feltételeztük továbbá, hogy egyik gazdaság sincs egyensúlyi növekedési pályán, de a stabilitás miatt mindkettő közelíti azt. Figyelembe véve az 1.2. következményt, azt vizsgáljuk, miként kerülhet ki a közepes fejlettség csapdájába ragadt gazdaság ebből a helyzetből, s növelheti a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értékét  $\bar{k}_3$ -ra. Ennek során azt használjuk ki, hogy az (1) differenciálegyenlet által előírt dinamikus rendszer bifurkál. Adottnak tekintve a termelési technológiát, a (4) feltételben szereplő  $g(\bar{k})$  függvény paramétereit kell megvizsgálni, hisz ezek az 1. ábra bal oldalának tanúsága szerint bifurkációs paraméterek. Célunk a fixpontok számának  $g'(\bar{k})$  mérséklése révén történő csökkentése. Erről az alábbiakat mondhatjuk:

$s$  növeléséhez a fogyasztás visszafogására lenne szükség, ami politikai szempontból nehezen vállalható már csak azért is, mert mint azt például Romer [13] megmutatja, a megszorítások eredménye csak több évtized elteltével várható.

$\delta$  műszaki-technológiai feltételek által meghatározott, csökkentésére a szakpolitikáknak nincs lehetőségük.

$\gamma$  csökkentése alkalmas népesedéspolitikai intézkedések révén lehetséges, ez azonban a népesség további előregedését vonná maga után, ezért nem járható út.

$\mu$  csökkentése a technikai haladás lassítását jelenti, ami az 1.2. Következmény szerint az egy főre eső GDP és fogyasztás egyensúlyi növekedési rátáját csökkenti.

Ezek szerint a közepes fejlettség csapdájából  $g'(\bar{k})$  csökkentése révén történő kikerülés súlyos nehézségekbe ütközik. Felmerül ugyanakkor a kérdés, hogy vizsgálódásainkat nem korlátozza-e az a főáramú közgazdaságtanból átvett megközelítés, mely a termelési technológiát a (2) termelési függvény segítségével írja le. Ez esetben ugyanis az exogén technikai haladás nem jelent egyebet, mint azt, hogy a folyamat az  $Y = F(K, L)$  termelési függvény teljes felületét az alapsíktól folyamatosan egyre távolabbra, egyre feljebb tolja. Feladva ezt a koncepciót, a következő szakaszban a technikai haladást egymást követő technológiai sokkok sorozataként fogjuk értelmezni.

## 2. A technikai haladás iránya

A jelen szakaszban feltesszük, hogy  $\mu = 0$ , s a technikai haladást más módon fogjuk megjeleníteni. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy  $\mu = 0$  esetén  $\bar{k} = \frac{K}{L} = \frac{K}{L} = k$ , ezért a továbbiakban az egyszerűbb jelölést alkalmazzuk. Folytatva annak tisztázásával, hogy az irodalomban szokatlan (3) függvény alkalmazása – túl azon, hogy céljainknak megfelel – miként indokolható, a technológiai sokk főáramú közgazdaságtantól némileg eltérő értelmezése szükséges:

**2.1. Definíció.** Technológiai sokkról akkor beszélünk, ha a termelési technológiát az  $y = A \cdot f(k)$  termelési függvény helyett az

$$y = A \cdot \left[ f(k) + \frac{b}{c + (d \cdot k - k^0)^{2n}} \right] \quad (5)$$

intenzív termelési függvénnyel írhatjuk le, ahol  $b \neq 0$ ,  $c, d > 0$ ,  $n$  pedig természetes szám. Pozitív technológiai sokk esetén  $b > 0$ , negatív technológiai sokk esetén fordított a helyzet.

A sokkot tehát a szögletes zárójelben álló második tag reprezentálja. Megjegyzendő ugyanakkor, hogy a definícióban nem kötöttük ki, hogy  $f(k)$  jól viselkedő. A  $k^0 > 0$  paraméter azt a tőke/munka arányt reprezentálja amelyik esetén a technológiai sokk hatása a legerősebb.

Atkinson és Stiglitz [2] nyomán feltesszük, hogy a technikai haladás egymást véletlenszerűen követő technológiai sokkok eredményeként megy végbe. Ezek során az (5) függvény  $b, c, d, j$  és  $k^0$  paraméterei véletlen változók. Ekkor az 1.1. következmény empirikusan nem igazolható, tény azonban, hogy  $\hat{k} > 0$ . Hogy ez továbbra is teljesüljön, szükséges feltenni, hogy  $E(b) > 0$ , azaz várhatóan több és/vagy erősebb a pozitív sokk, mint a negatív. Feltesszük, hogy az esetek többségében olyan termelési eljárások fejlődnek, melyek alkalmazása épp az aktuális tőke/munka arány mellett történik. Mivel hosszabb időhorizonton  $k$  növekedése empirikusan igazolható<sup>3</sup>, reális feltevés, hogy a technológiai sokkok által legerősebben érintett tőke/munka arány növekvő tendenciát mutat. Ezzel szemben a magyar gazdaság számára jelenleg elérhető műszaki technológiai színvonal szempontjából két nagyobb technológiai sokknak van meghatározó jelentősége:

- (i) A tervezett gazdaság évtizedei során az értelmiség bér munkásként történő kezelése nem támogatta, esetenként kifejezetten meggátolta a termelési technológiák fejlesztését, vagy a fejlettebb technológiák külföldről történő átvételét. Másrészt mivel a vállalatok költségvetési korlátja puha volt, Kornai [9] szerint azok erőforrásigénye majdnem kielégíthetetlen mértékűre duzzadt. A termelési erőforrások halmozása pedig gyakran műszaki szempontból nem hatékony technológiák alkalmazásához vezetett.

<sup>3</sup>Például Barro és Sala-i.Martin [3].

- (ii) A rendszerváltást követő fejlesztések jelentős része pályázati forrásokból történt, ami Bessenyei [4] szerint gyakran szuboptimális tőkestruktúrát eredményezett, ugyanakkor megnyílt a lehetőség a fejlett piacgazdaságokban már régóta alkalmazott, korszerű termelési technológiák átvételére.

A fenti tényezők együttesen eredményezték a (3) intenzív termelési függvénnyel leírható technológiai feltételek kialakulását. Időközben a technikai haladás folyamata lelassult<sup>4</sup>, a pozitív technológiai sokkok egyre ritkábbak, a klímaváltozás és az ennek lassítására tett erőfeszítések pedig egyre több negatív technológiai sokkot eredményeznek, így a (3) intenzív termelési függvény megmerevedni látszik.

A mikroszinten jelentkező következmények felméréséhez szükségünk lesz az 1. ábra bal oldalán bemutatott intenzív termelési függvény alapjául szolgáló termelési függvény szinthalmazainak, vagy izokvantjainak vizsgálatára.  $\mu = 0$  esetén az (3) intenzív termelési függvény az alábbi termelési függvényből származik:

$$Y = F(K, L) = A \cdot \left[ K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} - \frac{b \cdot L}{c + \left(d \cdot \frac{K}{L} - k_0\right)^{2n}} \right].$$

2.1. KÖVETKEZMÉNY. A technológiai sokk az  $Y = F(K, L)$  termelési függvénynek csupán egy darabját tolja el  $\epsilon \neq 0$ -nál jelentősebb mértékben.

Ennek a függvénynek egy izokvantját, azaz szinthalmazát mutatja be az 1. ábra jobb oldala. Mivel termelési függvényünk homogén, az izokvantok egymáshoz hasonlóak, a hasonlóság középpontja pedig az origó. Az ábrán elhelyezett nyilak jól mutatják, hogy a közepes fejlettség csapdájában lévő gazdaságra jellemző, alacsonyabb  $k_1 = K/L$  arány esetén nem feltétlenül érdemes a tőkeállományt bővíteni, mert előfordulhat, hogy a bővítés eredményeként a termelés nem növekszik. Mint látható, ez még abban az esetben is igaz lehet, ha a tőkeállomány bővítését a mellette felhasznált munka mennyiségének növelése kíséri. És az empirikus adatok arról tanúskodnak, hogy a hazai vállalatok (elsősorban a nemzeti tulajdonban lévő közepes és kisvállalatok) ténylegesen tartózkodnak is a tőkeállomány bővítésétől.<sup>5</sup> Pedig az (1) differenciálegyenlet szerint csakis ennek révén kerülhet ki a gazdaság a közepes fejlettség csapdájából.

A továbblépéshez szemügyre kell vennünk, hogy milyen mélyebb technológiai adottságok húzódnak meg a (3) intenzív termelési függvény mögött. A lineáris tevékenységelemzés modelljének felhasználásával Zalai [17] megmutatja, hogy a folytonos  $F(K, L)$  termelési függvény koncepciója az alábbi parametrikus lineáris programozási problémán alapul:

$$Y = \sum_{i=1}^m x_i \rightarrow \max \quad (6)$$

<sup>4</sup>Ennek okait részletesebben veszi számba Williamson [16].

<sup>5</sup>A jelenség további okait elemzi Parente és Prescott [12].

feltéve, hogy  $\mathbf{x} \geq 0$ , és

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Feltesszük, hogy a kibocsátás  $m$  különféle technológiai alapeljárás alkalmazása révén állítható elő. Mivel aggregált modellünkben csupán egyetlen fajta végtermék, a GDP kerül előállításra, az egyes alapeljárások  $x_j$ -vel jelölt alkalmazási szintjét mérhetjük az általuk előállított végtermék mennyiségével. Az  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2 \times m}$  mátrix egyes oszlopai az egyes alapeljárások egységnyi alkalmazási szinten történő működtetésének tőke-, illetve munkaigényét, azaz a tőke és munkakoefficienseket tartalmazzák. Az egyenlőségfeltétel szerepeltetését a fenti (ii) pontban említett szuboptimális tőkestruktúra mellett, elsősorban az (i) pontban említett halmazási tendencia indokolja. Az egyszerűbb tárgyalásmód érdekében rendezzük az  $\mathbf{R}$  mátrix oszlopait úgy, hogy  $\frac{r_{21}}{r_{11}} \leq \frac{r_{22}}{r_{12}} \leq \dots \leq \frac{r_{2m}}{r_{1m}}$  teljesüljön!

Az 1. ábra jobb oldala arról tanúskodik, hogy számos, műszaki szempontból nem hatékony alapeljárás is létezik. Ezek azonos kibocsátást több tőke, vagy munka felhasználása révén állítanak elő, mint a műszaki szempontból hatékony alapeljárások. A közepes fejlettség csapdájának fennállása esetén ezekre teljesül, hogy:  $k_3 < \frac{r_{2i}}{r_{1i}} < k_3$ . E vállalatok működtethetnek ugyan műszaki szempontból hatékony, és nem hatékony alatechnológiákat is, de amennyiben a termelés rendelkezésére álló kapacitásokat teljes mértékben kihasználják, a (6) célfüggvény nem teszi lehetővé, hogy meglévő termelési erőforrásaikat  $k_1$ -nél magasabb tőke/munka arány mellett alkalmazzák.

Megmutatható (pl: Zalai [17]), hogy a (6)-(7) problémának minden nemnegatív  $K$ -ra és  $L$ -re egy és csak egy megoldása van. Ezt használja ki az alábbi definíció:

**2.2. Definíció.** Legyenek  $K$  és  $L$  a (6)-(7) lineáris programozási probléma paraméterei, ekkor az  $Y = F(K, L)$  termelési függvény az optimális megoldások felhasználásával adódik.

**2.2. KÖVETKEZMÉNY.** A 2.2. definíció szerint kapott termelési függvény lineárisan homogén, így izokvantjai hasonlók, s a hasonlóság centruma az origó.

A termelési függvény 2.2. definíciója lehetőséget teremt arra, hogy a technikai haladás fogalmát az alábbi definícióra alapozzuk:

**2.3. Definíció.** Akkor beszélünk a  $j$ -edik alatechnológia fejlesztéséről, ha a (7) feltételben szereplő  $\mathbf{R}$  mátrix  $r_{ij}$  eleme csökken.

Atkinson és Stiglitz [2] nyomán figyelembe vesszük egy alatechnológia fejlesztésének más alatechnológiákra gyakorolt kisugárzó hatásait is. Jó példa erre a mikroprocesszorok kifejlesztése, ami elsősorban a számítástechnikát érintette, de jelentős hatást gyakorolt például a telekommunikációra is. Feltesszük tehát,

hogy egy alapterchnológia fejlesztése rendszerint további, hasonló paraméterekkel jellemezhető alapterchnológiák fejlődését is maga után vonja. Így a lineáris tevékenységelemzés modelljét alapul véve, a 2.1. definíciót az alábbival helyettesítjük:

*2.4. Definíció.* Pozitív technológiai sokkról akkor beszélünk, ha a (7) feltételben szereplő  $\mathbf{R}$  mátrixot az  $\tilde{\mathbf{R}}$  mátrix váltja fel oly módon, hogy

1.  $\tilde{r}_{i,j} = \rho_0 r_{i,j}$  ( $i = 1, 2$ ), ahol  $0 < \rho_0 < 1$ ,
2.  $\tilde{r}_{i,j+k} = \rho_k r_{i,j+k}$ , illetve  $\tilde{r}_{i,j-k} = \eta_k r_{i,j-k}$ , ahol  $\eta_0 = \rho_0$  és a  $\rho_n$  és  $\eta_n$  sorozatok monoton növekedőek, továbbá  $\rho_n, \eta_n \rightarrow 1$ .

Azt mondjuk továbbá, hogy a pozitív technológiai sokk elsősorban a  $j$ -edik alapterchnológiát érintette.

Ezek szerint pozitív technológiai sokk esetén a sokk által elsősorban érintett alapterchnológia egységnyi szinten történő működtetésének tőke-, illetve munkaigénye a sokk előtti érték  $\rho_0$  részére csökken. Ha a  $\rho_n$ , vagy  $\eta_n$  sorozatoknak nem mindegyik eleme 1, akkor a technológiai sokk nem csupán a  $j$ -edik alapterchnológiát érinti, hanem az  $\mathbf{R}$  mátrix szomszédos oszlopai által reprezentált alapterchnológiákat is. Ebben az esetben az elsősorban a  $j$ -edik alapterchnológiát érintő sokk a  $\rho_n$  és  $\eta_n$  sorozatok által meghatározott mértékben a  $j \pm 1, j \pm 2, \dots$  alapterchnológiákra is kisugárzik.

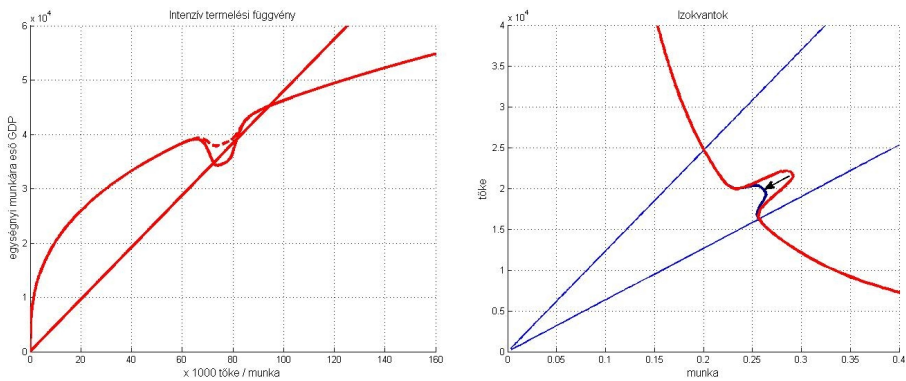
Hasonlóan értelmezhetjük a negatív technológiai sokkot, amennyiben  $\rho_0 > 1$ , és a  $\rho_n$  és  $\eta_n$  sorozatok monoton csökkenők. A sokk mértéke ekkor  $1 - \rho_0$ , az általa elsősorban érintett alapterchnológia javulásának (vagy romlásának) kisugárzását pedig a  $\rho_n$  és  $\eta_n$  sorozatok határozzák meg.

Erdemes felfigyelni rá, hogy technológiai sokk iménti értelmezése szerint  $\dot{K} = 0$  és  $\dot{L} = 0$  esetén a pozitív technológiai sokkból nem  $\dot{Y} > 0$ , csupán  $\dot{Y} \geq 0$  következik. Abban az esetben marad a kibocsátás változatlan, ha a technikai haladás során egy olyan alapeljárás javul, melyet a vállalatok nem használnak. Jó példa erre a Trace Gas Orbiter űrszonda Mars körüli keringőegységében található egyik műszerhez az MTA Wigner FK kutatói által készített szoftver, ami kétségkívül jelentős technológiai fejlesztésnek tekintendő. Ugyanakkor ez a javulás a hazai vállalatok termelési technológiáját nem érinti, így változatlan tőke és munkafelhasználás mellett azok kibocsátása sem nő.

Szemügyre véve még egyszer az 1. ábrát úgy tűnik, hogy a közepes fejlettség csapdájából való kikerüléshez elegendő a műszaki szempontból nem hatékony alapeljárások fejlesztése. Valóban, az ilyen technológiákat leíró elemek nagyságát az 1. ábra alapjául szolgáló  $\mathbf{R}$  mátrixban mintegy 1 - 7%-kal javítva megnyílik a kiút a csapdahelyzetből. Megmutatható ugyanis<sup>6</sup>, hogy a 2.2. definíció alkalmazása esetén, amennyiben kevés alapterchnológia létezik, a termelési függvény szinthalmazai

<sup>6</sup>Pl: Zalai [17].

az origóra konvex poligonok. Nagyszámú alaptermék létezése esetén a poligonok töréspontjainak száma is növekszik, s azok mindinkább a 2. ábra jobb oldalán bemutatott görbét közelítik. Itt egyetlen izokvantot tüntettünk fel az említett technológiai fejlesztés előtt és azt követően. A technológiai fejlesztés eredményeként az izokvant egy darabja elmozdul, az elmozdulás irányát nyíllal jelöltük. Mint látható, a kismértékű ( $\rho_0 = 0.93$ ) fejlesztést követően is maradnak műszaki szempontból nem hatékony alaptermék-technológiák, de a 2. ábra bal oldalán látható intenzív termelési függvény mégis elégséges mértékben tolódik el (Lásd annak szaggatottan jelölt darabját!) ahhoz, hogy az (1) differenciálegyenlet által leírt, neoklasszikus egyensúlyteremtő mechanizmus a gazdaságot a közepes fejlettség csapdájából a magasabb,  $k_3$ -as egyensúlyi tőke/munka arányhoz vezesse.



2. ábra

Eredményeinket az alábbi tétel foglalja össze:

**2.1. TÉTEL.** Ha  $k_1 < k_2 < k_3$  tőke/munka arányokkal jellemezhető egyensúlyi növekedési pályák esetén a  $k_2$  melletti pálya instabil, a másik kettő pedig stabil, akkor létezik olyan  $\rho_0 < 1$  mértékű, és  $\rho_n, \eta_n$  kisugárzású pozitív technológiai sokk, melynek eredményeként egyetlen, stabil fixpont marad. Továbbá  $k^*$ -gal jelölve az ehhez tartozó tőke/munka arányt,  $k_3 \leq k^*$ .

Az is látható a 2. ábrán, hogy a közepes fejlettség csapdájában megrekedt gazdaság számára már kiutat jelentő pozitív technológiai sokk mértéke abban az esetben a legkisebb ( $\rho_0$  akkor lehet a legnagyobb), ha ez a sokk elsősorban a műszaki szempontból legkevésbé hatékony technológiai alapeljárást érinti. Ezt az alapeljárást tekinthetjük a közepes fejlettség csapdájának elhagyását eredményező technikai haladás legjobb irányának. Megjegyzendő ugyanakkor, hogy a legjobb irány követése nem mindig lehetséges. Ilyenkor célszerű olyan alaptermék-technológiát fejleszteni, melynek kisugárzása a legjobb irányt képviselő alapeljárásra maximális.

Figyelembe véve továbbá, hogy az (1) differenciálegyenlet bal oldalán álló változó az alkalmazkodás sebességét méri, az is látható, hogy az egy főre eső GDP annál gyorsabban növekszik, minél nagyobb az  $f(k) - \frac{\gamma+\delta}{s}k$  különbség. Így a felzárkózási pálya kezdetén a növekedés gyors, majd lelassul, ezt követően ismét gyorsul, majd az immár egyetlen stabil fixponthoz közeledve egyre lassul.

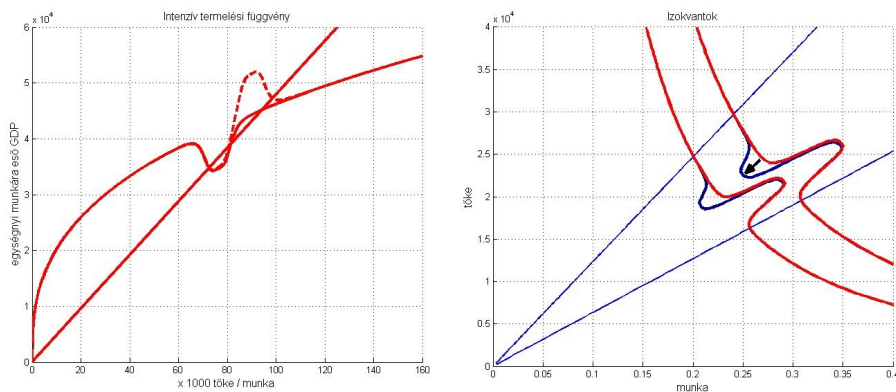
### 3. Záró megjegyzések

Azt vizsgáltuk, hogy miként kerülhet ki egy gazdaság a közepes fejlettség csapdájából. Tanulmányunk egyik fő eredménye a (3) intenzív termelési függvény megkonstruálása, mely lehetővé teszi a csapdahelyzet neoklasszikus növekedési modellbe történő bevezetését. Ennek felhasználásával számba vettük a felzárkózás előtt álló nehézségeket. Másik fő eredményünket a 2.1. tétel mondja ki, melyet a (3) intenzív termelési függvény alapjául szolgáló lineáris tevékenységelemzési modell felírása révén kaptunk. Ezt felhasználva beazonosítottuk azokat a technológiai alapeljárásokat, melyek fejlesztése szükséges a közepes fejlettség csapdájából történő kikerüléshez. Azt találtuk, hogy ezek nem azok az alapttechnológiák, melyeket az utolérni szándékozott gazdaság alkalmaz, hanem annál alacsonyabb tőke/munka arány mellett működtethető, műszaki szempontból nem hatékony, ugyanakkor a közepes fejlettség csapdájában működő vállalatok számára reálisan elérhető eljárások.

A 3. ábrán bemutatjuk, mi történik abban az esetben, ha a technikai fejlesztés – eredményeinket figyelmen kívül hagyva – a legfejlettebb technológiákat érinti. A jobb megjelenítés érdekében ezúttal két izokvantot tüntettünk fel, mindegyiket két példányban, ugyanakkor nem jelöltük  $k_1$ ,  $k_2$  és  $k_3$  egyensúlyi értékeit. A fejlesztés ezúttal is az izokvantok egy-egy darabjának origó irányába történő elmozdulását eredményezte. Az egyensúlyi növekedési pályát továbbra is a  $g(k)$  egyenes és az  $f(k)$  görbe metszéspontjai határozzák meg. Utóbbit a technikai fejlesztés előtt – a 2. ábrához hasonlóan – ezúttal is folytonos vonallal jelöltük, a technikai fejlesztés után pedig szaggatottal. Mint az ábra bal oldalán látható, a fejlesztés ellenére a gazdaság a közepes fejlettség csapdájában maradt.

Comin és Hobjin [6] tanulmánya szerint az új technológiák térhódítása az utóbbi évszázadok során felgyorsult. Míg a gőzhajózás széleskörű elterjedéséhez közel 120 év kellett, a mobiltelefon, vagy az MRI esetében kevesebb, mint fél évtizedre volt szükség. A jelen tanulmány fő következtetése ugyanakkor arra figyelmeztet, hogy egyes új technológiák, vagy az azokat hordozó termékek használatának gyors elterjedése ellenére, a közepes fejlettség csapdájában megrekedt gazdaságokban racionális számos elavult, műszaki szempontból nem hatékony technológiát is működtetni, és fejleszteni. Ezek hatékonyabbakkal történő felváltásához pedig szükséges az elégtelen tőkeállomány bővítése, melynek folyamatát az (1) differenciálegyenlet írja elő. Szakítva a főáramú közgazdaságtan által előszeretettel alkalmazott





3. ábra

jól viselkedő intenzív termelési függvény és a minden alapeljárást egyformán érintő technikai haladás koncepciójával, a tőkeállomány bővítése előtt álló akadályok láthatóvá válnak csakúgy, mint a közepes fejlettség csapdájából kivezető út.

### Köszönetnyilvánítás

A kutatást az Innovációs és Technológiai Minisztérium Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Programja finanszírozta, a Pécsi Tudományegyetem 4. - A hazai vállalatok szerepének növelése a nemzet újraiparosításában - tématerületi programja keretében.

A szerző ezúton mond köszönetet a két anonim lektornak, akik gondos megjegyzéseikkel javítottak a cikkben.

### Hivatkozások

- [1] AGÉNOR, P. R. AND CANUTO, O.: *Middle-Income Growth Trap*, The World Bank, Policy Research Working Papers, 6210, (2012). DOI: [10.1016/j.rie.2015.04.003](https://doi.org/10.1016/j.rie.2015.04.003)
- [2] ATKINSON, A. B. AND STIGLITZ, J. E.: *A New View of Technological Change*, Economic Journal, pp. 573-578 (1969). DOI: [10.2307/2230384](https://doi.org/10.2307/2230384)
- [3] BARRO, R. AND SALA-I-MARTIN, X.: *Economic Growth*, MIT Press, Cambridge, p. 12 (2004).
- [4] BESSENYEI I.: *Gazdasági növekedés és fenntarthatóság*, Nemzeti Fenntartható Fejlődési Tanács, Műhelytanulmányok, Vol. 20 (2014).
- [5] BURMEISTER, E. AND DOBELL, A. R.: *Mathematical Theories of Economic Growth*, Collier-Macmillan, New York pp. 25-29 (1970).

- [6] COMIN, D. A. AND HOBIN, B.: *An Exploration of Technology Diffusion*, Harvard Business School Working Papers 08-093. (2008). DOI: [10.1257/aer.100.5.2031](https://doi.org/10.1257/aer.100.5.2031)
- [7] INADA, K.: *On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and Generalization*, Review of Economic Studies, Vol. **30**, pp. 119-127 (1964). DOI: [10.2307/2295809](https://doi.org/10.2307/2295809)
- [8] JONES, C. I.: *The end of economic growth? Unintended Consequences of a declining population*, NBER Working Paper Series, 26651, (2020). DOI: [10.3386/w26651](https://doi.org/10.3386/w26651)
- [9] KORNAI, J.: *A hiány I. Alkalmazkodás árak nélkül*, Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 115-118. o. (1980).
- [10] MAGYAR NEMZETI BANK: *Növekedési jelentés*, 44-47. o. (2018).
- [11] NELSON, B. B.: *Growth Models and the Escape from the Equilibrium Trap: The Case of Japan*, Economic Development and Cultural Change, pp. 378-388 (1960).
- [12] PARENTE, S. AND PRESCOTT, E.: *Barriers to the Riches*, MIT Press, Cambridge, MA, (2000). DOI: [10.1257/aer.89.5.1216](https://doi.org/10.1257/aer.89.5.1216)
- [13] ROMER, D.: *Advanced macroeconomics*, McGraw-Hill Irwin, pp. 24-26 (2006).
- [14] SOLOW, R. M.: *A Contribution to the Theory of Economic Growth*. Quarterly Journal of Economics, Vol. **70**, pp. 65-94 (1956). DOI: [10.2307/1884513](https://doi.org/10.2307/1884513)
- [15] SNOWDON B.: *The Solow model, poverty traps and the foreign aid debate*, History of political economy, Vol. **41**, pp 241-262 (2009). DOI: [10.1215/00182702-2009-026](https://doi.org/10.1215/00182702-2009-026)
- [16] WILLIAMSON, S. D.: *Makroökonómia*, Osiris, Budapest, 213. o. (2009).
- [17] Zalai, E.: *Matematikai közgazdaságtan I. Általános egyensúlyi modellek és mikroökonómiai elemzések*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 313-320. o. (2011).



BESSENYEI ISTVÁN

Közgazdaságtan és Ökonometria Intézet  
 Gazdaságtudományi Kiválósági Központ  
 7622 Pécs, Rákóczi út 80. - B 110  
[bessenyei.istvan@ktk.pte.hu](mailto:bessenyei.istvan@ktk.pte.hu)

1984-ben szerzett programozó matematikusi oklevelet a szegedi József Attila Tudományegyetemen, 1992-ben pedig közgazdász diplomát a pécsi Janus Pannonius Tudományegyetemen. PhD fokozatát 2003-ban szerezte a Pécsi Tudományegyetemen, értekezésének címe: A megtakarítások és gazdasági növekedés viszonyának néhány elméleti kérdése. Ugyanitt habilitált 2011-ben. 2010 óta a Sigma matematikai-közgazdasági folyóirat főszerkesztője. Pécsi egyetemi oktatómunkája mellett 2008 óta rendszeresen tanít a kolozsvári Babes-Bolyai Tudományegyetemen is. Nős, három felnőtt lánya van.

## TECHNICAL PROGRESS IN THE MIDDLE-INCOME GROWTH TRAP

ISTVÁN BESSENYEI

This paper examines how a less developed economy can escape from the middle-income growth trap by achieving an another stable growth path with a higher level of GDP per capita. To represent the technical possibilities of this economy, first we construct a production function that is capable of representing also the case of the middle-income trap. Introducing this function in the neoclassical growth model, we point out the obstacles to emerge. In contrast to the mainstream economics, we examine how this production function derives from the linear activity analysis model. This way we can clarify the right direction of technical progress for to escape from the middle-level income trap. Our main finding is to show that the improvement of those basic production technologies which are used in the most developed economies will not set this economy on its way towards a higher level of GDP per capita. Bypassing the middle-income growth trap requires the improvement of some of the older, less capital intensive technologies that companies of this economy can access, taking into account also the investment sources.

## HA ELMÚLT ÖTVENÖT ÉVES, MEGMONDJA AZ ÉLETKORÁT? AZ OSZKÁR SOFŐRÖK VISELKEDÉSÉNEK MODELLEZÉSE<sup>1</sup>

BERDE ÉVA, KUNCZ IZABELLA

A platform gazdaságok egyik sajátossága, hogy az idősebb polgárok számára is munkavégzési lehetőséget biztosíthatnak. Olyanoknak is, akik önként vállalják ezt a módot, illetve olyanoknak, akik kiszorultak a munkaerőpiac egyéb szegmenseiből. Mindezt jól mutatja az Oszkár Telekocsi utastárs-közvetítő fejlődése, ahol a megalakulása óta nem csak a csatlakozott sofőrök száma növekedett többszörösére, de ezen belül az 55 évesek és idősebbek aránya is emelkedett. Az Oszkár, mint a legtöbb platform, lehetőséget ad arra, hogy a szolgáltatást kínáló jelezzék életkorukat, sokan azonban ezt nem teszik meg. Tanulmányunkban egy bayesi játékelméleti modellel bizonyítjuk, hogy az idősebbek részére valóban egyensúlyi megoldást jelenthet, ha nem mindig jelzik korukat. Ugyanezt az eredményt adja két részletben végzett rövid online felmérésünk is.

JEL kód: C72, J00, L19

*Kulcsszavak:* Platform gazdaság, idősebb sofőrök, on-line felmérés, játékelméleti modell

### 1. Bevezetés

A várható élettartam emelkedése, és ezzel együtt az egészségben eltölthető évek számának növekedése lehetővé teszi, hogy a munkaerő-piacon töltött idő is hosszabbodjon. Az európai jóléti államok többségében azonban egészen az 1980-as évek közepéig még viszonylag alacsony korhatár mellett élvezhette az idősebb korosztály a nyugdíjba vonulás kényelmét, és az ehhez kapcsolódó relatív anyagi jólétet. Általánosan elfogadott nézet volt, hogy az idősebb korosztály „kötelessége”, hogy kivonuljon a munkapiacról, átadva helyét a fiatalabb generációnak. Szélsőséges példaként hozható fel a jelenségre az Ilmakunnas és Maliranta (2007) által bemutatott úgynevezett „Walmart-hatás”, miszerint a vállalati vezetés már a középkorú alkalmazottakat is igyekezett hatékonyabb, fiatalabb munkaerővel helyettesíteni.

---

<sup>1</sup>Jelen publikáció/kutatás az Európai Unió, Magyarország és az Európai Szociális Alap társfinanszírozása által biztosított forrásból az EFOP-3.6.2-16-2017-00017 azonosítójú „Fenntartható, intelligens és befogadó regionális és városi modellek” című projekt keretében jött létre.

A lakosság öregedésével párhuzamosan az 1980-as évek végétől kezdődően a legtöbb európai országban elindult a nyugdíjkorhatár emelése, és a kormányzatok igyekeztek népszerűsíteni az idősebb korúak munkájának hasznosságát. A PwC (2018) az ún. „Aranykor Index<sup>2</sup>” segítségével úgy becsülte, hogy 2016-ban a Gazdasági Együttműködési és Fejlesztési Szervezet (Organization for Economic Co-operation and Development, OECD) országainak GDP értéke hosszú távon összesen 3,5 billió dollárral lenne magasabb, ha az 55-64 éves korosztály foglalkoztatási rátája elérné az Új-Zélandon megfigyelt 78%-os értéket<sup>3</sup>. A kormányzat szándékát azonban nemcsak az idősebb generáció személyes motivációjának hiánya akadályozza, hanem a társadalomban rögzült elképzelések és a vállalati szintű stratégiák is.

Cikkünkben a társadalmi meggyőződés egy sajátos megnyilvánulásával foglalkozunk. Hipotézisünk szerint az idősebb polgárokat negatív megkülönböztetés éri – vagy legalábbis ők úgy érzik, hogy megkülönböztetéssel szembesülnek – a munkakeresés során, de nemcsak a hagyományos foglalkoztatási formák, hanem az online platformokon keresztül elérhető munkalehetőségek esetében is. Azt állítjuk, hogy az idősebb korosztály próbál alkalmazkodni a jelenlegi körülményekhez, és emiatt vagy szándékosan tévesen, vagy egyáltalán nem adják meg életkorukat. Ezzel szemben a fiatalabb, 30-55 éves korosztálynak megéri bevallani a valós korát.

Az idősebbek foglalkoztatottsága Magyarországon a 2000-es évektől kezdve rohamosan növekedett. A KSH adatai szerint 2002 és 2018 közt az 55-59 évesek foglalkoztatottsága több mint 30%ponttal emelkedett, a 60-64 éveseké pedig majdnem 30%ponttal. Az 55-59 évesek által elért szint, a 74% meghaladta az EU megfelelő átlagát, a 60-64 évesek 38,2%-a azonban még mindig több mint 6%ponttal maradt el korosztályuk EU átlagától. Mint ahogy azonban Button (2019) is írta, a szeniorok hagyományos, sztenderd munkavégzése sokkal kisebb arányú, mint a fiatalabbaké. Amikor ők jelentkeznek egy állásinterjúra, akkor nekik sokkal kisebb az esélyük arra, hogy visszahívást kapjanak. Sokan válnak közülük önfoglalkoztatóvá, illetve jó lehetőséget jelent számukra az olyan típusú platformokon keresztül végzett munka, melyről jelen cikkünk szól.

A fentieket alátámasztva Berde és Tőkés (2020) a magyar Oszkár<sup>4</sup> útítárs-kereső platform adatainak elemzésekor úgy találták, hogy átlagosan az alkalmazást használó sofőrök 30-40%-a nem adja meg életkorát az adatlapján. Természetesen ez nem jelenti azt, hogy csak az idősebb felhasználók hagyják üresen ezt az információt, valószínűleg mások is így tesznek, főként a nagyon fiatalok.

<sup>2</sup>Az „Aranykor Index (angolul Golden Age Index) egy olyan kompozit index, mely hét mutató súlyozott átlagaként az 55 évesek és idősebbek munkaerő-piaci hatását méri. Legnagyobb súlya az indexben az 55-64 évesek foglalkoztatási rátájának van.

<sup>3</sup>Új-Zélandon, Izlandon, és Svédországban a legmagasabb a vizsgált korosztály foglalkoztatottsága PwC (2018) szerint.

<sup>4</sup>A 2007-es alapításakor az Oszkár alapvetően egy telekocsi szolgáltatás volt, azonban Berde és Tőkés (2020) az Oszkár adatok alapján megállapította, hogy napjainkban egyre inkább a kereskedelmi céllal meghirdetett utak kerülnek túlsúlyba.

A 30-55 év közti korosztály azonban véleményünk szerint inkább figyelmetlenségből, és nem tudatosan tartja titokban életkorát. Berde és Tőkés (2020) arra is felhívják a figyelmet, hogy Huws et al. (2017) állításával ellentétben, az idősebbek is szívesen használnak online platformokat munkavégzési céllal. Legalábbis az Oszkár esetében az 55 éves vagy idősebb sofőrök aránya emelkedett, miközben a platform járművezetőinek teljes létszáma is nőtt. Emiatt különösen fontos kérdés, hogy hogyan viselkednek az idősebb munkavállalók a hasonló jellegű online platformokon. Elemzésünk során így eltekintünk a fiatalabb korosztálytól, és modellünkben csak az idősebb sofőröket szerepeltetjük.

Hipotézisünket, miszerint az idősebb korosztály inkább eltitkolja életkorát, egy online kérdőíves felmérés segítségével bizonyítjuk. A kérdőív eredményeit a cikk második részében mutatjuk be. A harmadik részben egy jól ismert játékelméleti modell segítségével támasztjuk alá állításunkat az idősebb korcsoportok stratégiáját illetően. Végül összefoglaljuk következtetéseinket.

## 2. Az online kérdőív

Az online felmérésünkben összesen öt kérdést tettünk fel, melyek a kérdőív teljes szövegével együtt az A. Függelékben olvashatók. A kitöltőknek elsőként a nemüket és a születési évüket kellett megadni. Majd arról érdeklődtünk, hogy véleményünk szerint az internetes platformokon kínált szolgáltatások esetén – például sofőrködés, takarítás, korrepetálás – figyelembe veszik-e az ügyfelek a hirdető életkorát. A következő kérdésünk arra irányult, hogy amennyiben lehetséges az életkoruk megadása, de nem kötelező (és annak valóságát sem ellenőrizzük), kitöltenék-e az erre vonatkozó részt az internetes felületeken. Végül abban az esetben, ha az előző kérdésnél úgy döntöttek, hogy beírnának egy életkort, azt kellett megválaszolniuk, hogy hány évesként tüntetnék fel magukat.

Az online kérdőívet olyan levelezési listákon és Facebook csoportokban terjesztettük, ahol a legtöbb résztvevő 55 éven felüli. Első körben 2018 júniusától 2018 augusztusáig gyűjtöttük a válaszokat<sup>5</sup> elsősorban bizonyos levelező listákon keresztül, majd 2019 áprilisában és májusában Facebook csoportokat céloztunk meg. Ekkor is olyan csoportokat választottunk, ahol alapvetően az idősebb korosztály alkotta a tagságot. Összesen 241 ember töltötte ki a kérdőívünket, akik közül a legfiatalabb 20 éves, a legidősebb pedig 78 éves volt. Miután a mintából kivettük az 55 év alattiakat, 147 kitöltőnk maradt. A kapott válaszok megoszlását és a válaszolók nem szerinti megoszlását az 1. táblázatban foglaljuk össze.

---

<sup>5</sup>Az első szakaszban végzett felmérés eredményeiről Berde (2019) számol be.

1. táblázat. A kapott válaszok megoszlása az 55 évesek és idősebbek korcsoportjában.

Nem	Férfi	Nő
	37,4%	62,6%
Véleménye szerint életkorának van jelentősége abban, hogy mennyi ügyfele lesz?	Igen 82,3%	Nem 17,7%
Ön megadna valamilyen életkort?	Igen 55,8%	Nem 44,2%
Azok, akik szerint számít az életkor, megadnák az életkorukat?	Igen 46,3% <sup>6</sup>	Nem 53,7%
Azok, akik szerint nem számít az életkor, megadnák az életkorukat?	Igen 100% <sup>7</sup>	Nem 0%

Az online felmérésünk nem tekinthető reprezentatívnak, mert sajátos módon terjesztettük. Egy bizonyos Facebook csoporthoz, vagy levelező listához való tartozás eleve egyfajta önszelekción alapul. Ennek ellenére kérdőívünkéből úgy tűnik, hogy a megkérdezettek többsége szerint az életkor szignifikáns tényező a tekintetben, hogy igénybe veszik-e az általuk kínált szolgáltatást, vagy sem. Tanulmányunk következő részében megmutatjuk, hogy egy Cho és Kreps (1987) és Kreps (1990) által alkalmazott bayesi játék modellje is a hipotézisünknek megfelelő következtetésre vezet.

### 3. A modell

#### 3.1. A modell elméleti háttere

Modellünk két ismert játékelméleti fogalmat használ, a munkapiaci jelzést és a Harsányi-féle transzformációt, mely a nem-teljes információjú játékokat nem-tökéletes információjú játékokká alakítja át, azaz áttranszformálja azt a helyzetet, amikor az egyik játékos valamit nem tud a másik játékosról, egy olyan helyzetté, amikor az egyik játékos azt nem tudja, hogy a másik játékos mit lépett a játék megelőző fázisában. A munkapiaci jelzés elméletét elsőként Spence (1973) vezette be. Ennek lényege, hogy a munkaadó olyan szerződést ajánl, melyben a kifizetett bér a munkavállaló végbizonyítvánnyal vagy diplomával igazolt iskolázottsági szintjének függvénye. A valódi kompetenciaszintjét azonban csak saját maga, a munkavállaló ismeri, és azt nem feltétlenül tükrözi a végzettsége. Egy egyetemi diplomával rendelkező, de kevésbé alkalmas személy így magasabb bérhez juthat hozzá, mint

<sup>6</sup>Azok százalékában, akik szerint számít az életkor.

<sup>7</sup>Azok százalékában, akik szerint nem számít az életkor.

egy hasonló képességű nem diplomás egyén. Bár a jelzés bevezetése a munkapiacra Spence (1973) érdeme, hasonló gondolatok megjelentek Arrow (1973), Mincer (1974) és Stiglitz (1975) tanulmányaiban is. A munkavállalói szerződések vizsgálatának leggyakoribb eszközét, a Spence-féle jelzést alkalmazza többek között Lazear és Rosen (1981), Hanushek (1986), Heckman et al. (2006) és Slee (2017), melyek közül ez utóbbi tanulmányunk szempontjából a leginkább releváns. Slee (2017) rávilágít arra, hogy az úgynevezett *hukni* gazdaságban<sup>8</sup> (angolul *gig economy*) online felületen keresztül végzett munka minősítési rendszere alapján úgy tűnhet, hogy az emberek teljesítményének értékelése objektív módon történik, vagyis az értékelés a munkájuk minőségét tükrözi. Slee azonban bebizonyítja, hogy a valóságban ezek az értékelések sokkal inkább előítéleteken alapulnak, mint a feltevések által adott hagyományos minősítések. A *hukni* gazdaságban dolgozók emiatt arra kényszerülnek, hogy olyan jelzéseket küldjenek, melyekkel ellensúlyozhatják az előítéleteket és jobb értékelést kaphatnak (például megpróbálhatják elrejteni a helyi etnikai kisebbséghez való tartozásukat).

Az olyan szituációkat, amikor egyes játékosok birtokában vannak bizonyos ismeretnek, míg másokénak nem, hiányos vagy nem-teljes információjú játékoknak nevezzük. Ilyen típusú ismeret lehet például az életkor, az alkalmasság, stb. Harsányi (1967, 1968a, 1968b) megmutatta, hogyan lehet a nem-teljes információs játékokat nem-tökéletes információssá alakítani a „Véletlen”, mint elsőként lépő játékos bevezetésével. A Véletlennek nincsenek kifizetései, de meghatározza a játékosok típusát. A játékosok ezután cselekedeteikkel jelezhetik típusukat, így például Spence (1973) modelljében a tehetségesebb egyének kisebb erőfeszítéssel képesek elvégezni az egyetemet, így nagyobb valószínűséggel szereznek diplomát. A játékosok viszont megpróbálhatnak a típusuktól eltérő jelzést küldeni, hogy magasabb kifizetéshez jussanak, mint az előző példában megjelenített rosszabb képességű, de diplomás munkavállaló. Mivel a másik játékos csak a megfigyelt jelzés alapján feltételezheti az előbbieket típusát, így az azonos jelzést küldő egyének ugyanabba az információs halmazba kerülnek. Roth és Sotomayor (1992) ezzel a megközelítési móddal modellezte a munkapiacot. Osborne és Rubinstein (1994) szintén tartalmazza a Harsányi-transzformációt, ahol emellett hangsúlyozzák a külső körülmények szerepét is. Azt állítják, hogy a körülmények függenek a játékosok viselkedésétől, és ez fordítva is igaz, a játékosok viselkedésére befolyással vannak a külső körülmények. Az alábbiakban bemutatott modellünk a fentiekben kifejtett alapelvekre épül<sup>9</sup>.

<sup>8</sup>A foglalkoztatás atipikus formája, melybe az informális munkavállalás azon formái tartoznak, ahol online platformon keresztül vállalnak alkalmi jellegű munkát.

<sup>9</sup>Az extenzív forma leírásakor és az ott alkalmazott akciók jelölésekor, illetve mindezek játékelméleti hátterének bemutatásakor részben támaszkodtunk Berde (2019)-re.



### 3.2. A modell felépítése és eredményei

Modellünkben két típusú sofőr található<sup>10</sup>. Az egyik típus úgy véli, hogy az életkor nem számít, attól függetlenül választják őt a fogyasztók. Jelöljük ezt a típust R-rel („regardless”)! A másik típus vele szemben azt gondolja, hogy igenis számít az életkor, így például az idősebb sofőrök kevesebb megbízást kapnak. Ez utóbbi típust M-mel jelöljük („matters”). Szolgáltatásuk meghirdetéséhez mindannyian regisztrálnak egy online platformon az adatlap kitöltésével, melyben nem kötelező minden kérdést megválaszolni, így például nem feltétlenül szükséges megadni életkorukat. Mivel a valóságban nem ellenőrzik az adatok helyességét, előfordulhat, hogy hamis információt jelenítenek meg. Modellünkben azonban eltekintünk a hazugság lehetőségétől<sup>11</sup>, így az alábbiakban csak az életkor eltitkolása, vagy a valós életkor bevallása a szereplők két opciója.

Az utasok látják az adatlapon a sofőr feltüntetett életkorát. Természetesen gyakrabban találkoznak fiatalabb sofőrrel, mint időssel, modellünkben azonban az idősebb sofőrökre koncentrálunk. Az idősebb sofőröket vizsgálva azt elemezzük, hogy mennyire érdemes a sofőrnek közölnie tényleges életkorát. Amikor a sofőr meghirdet egy utat, a potenciális utas vagy elfogadja az utazás lehetőségét és jelentkezik, vagy nem. A döntés során mérlegelt egyik információ a sofőr életkora, ami előfordulhat, hogy nincs megadva. Ebben az esetben az utas nem tudja, hogy miért hiányzik ez az információ (azért, mert a sofőr túl idős, vagy azért, mert egyszerűen átsiklott felette az adatlap kitöltésekor). Mi a modellünkben eltekintettünk azoktól az esetektől, amikor valaki figyelmetlenségből nem írta be az életkort. Kérdőíves felmérésünk azt mutatta, hogy az 55 éven felüliek döntő része úgy gondolja, hogy az életkor releváns tényező akkor, amikor egy alkalmi munka végzésekor a „megrendelő” kiválasztja őket. A megkérdezettek mindössze 17,7 százaléka válaszolt kérdésünkre úgy, hogy nem számít az életkor, azaz modellbeli kategorizálásunk szerint csak ennyien voltak R típusúak.

A kifizetéseket Cho és Kreps (1987) játékához hasonlóan adtuk meg. Akárcsak Cho és Kreps, mi is csak a kifizetések egymáshoz képest vett értékének tulajdonítottunk jelentőséget: a sofőr akkor jár jobban, ha típusának megfelelően viselkedik, az utasnak pedig azt a sofőrt érdemes inkább elfogadnia, aki szerint nem számít az életkor. Ezt számszerűsítve: az utas kifizetése 1, ha a sofőrrel típusának meg-

<sup>10</sup>Ahogy azt már korábban a bevezetésben jeleztük, modellünk csak az idősebb sofőrökre vonatkozik. Feltesszük, hogy az utas egyrészt egyéb információkból – pl. a fényképből, vagy a fénykép helyére feltöltött más képből, illetve a sofőr vezetési történetéből – akkor is következtetni tud arra, hogy fiatalabb vagy idősebb sofőrrel áll szemben, ha a sofőr adatlapján nincs ott az életkor. Továbbá feltesszük, hogy az utas bizonyos esetekben az idősebb sofőrt is elfogadja. Hogy milyen esetekben fogadja el, ezt vizsgáljuk a modellben.

<sup>11</sup>A mintánkban azok szerint is, akik úgy vélték, számít az életkor, eleve csak 5% nyilatkozott úgy, hogy más életkort ír be, mint a tényleges életkora. Válaszunkban minden bizonnyal szerepet játszott az is, hogy ha valaki hazudik, akkor nem szívesen árulja el, hogy hazudik. Ezzel együtt a más életkort bevallók számát nem tekintettük szignifikánsnak, és csak arra figyeltünk, hogy valaki bevallja-e az életkorát, vagy sem.

felelően viselkedik, vagyis elfogadja annak a szolgáltatását, aki szerint az életkor nem számít, és elutasítja azét, aki szerint számít. Ellenkező esetben az utasok kifizetése 0. A 2. táblázatban összefoglaljuk az utas kifizetését.

2. táblázat. Az utas kifizetései a sofőr elfogadása, illetve elutasítása esetén.

	R típusú	M típusú
<b>Elfogadja</b>	1	0
<b>Nem fogadja el</b>	0	1

Mivel az utas nem tudja közvetlenül megfigyelni a sofőr típusát, csak azt, hogy megadta-e életkorát vagy sem, a sofőr számára az életkor megadása egy jelzés, amely saját típusától függően különböző kifizetést biztosít számára, miközben befolyásolja az utas döntését. A sofőr jelzések által megszerzett kifizetéseit a 3. táblázatban foglaljuk össze.

3. táblázat. A sofőr kifizetései az életkor megadása és elrejtése esetén.

	R típusú	M típusú
<b>Megadja életkorát</b>	1	0
<b>Nem adja meg életkorát</b>	0	1

A sofőr kifizetése azonban nagyobb mértékben függ attól, hogy az utas elfogadja-e őt, vagy sem. Ezeket a kifizetéseket a 4. táblázat tartalmazza.

4. táblázat. A sofőr kifizetései ajánlatának elfogadása és elutasítása esetén.

	R típusú	M típusú
<b>Elfogadja az utas</b>	2	2
<b>Nem fogadja el az utas</b>	0	0

A különböző kifizetések összeadódnak, így a 3. és a 4. táblázat alapján az R típusú sofőr kifizetése, ha megadja életkorát, és az utas elfogadja a szolgáltatását, összesen 3. Ha megadja életkorát, de nem fogadja el az utas, akkor a kifizetése 1. Amennyiben nem jeleníti meg korát, de szolgáltatását elfogadja az utas, akkor 2, ha pedig nem fogadja el, akkor 0. Az M típusú sofőr kifizetéseit is hasonlóképpen, additív módon adhatjuk meg. Amennyiben M típusával ellentétesen bevallja az életkorát, és elfogadja őt az utas, akkor 2 a kifizetése, viszont, ha nem vallja be az életkorát, és nem fogadja el őt az utas, akkor csak 1 kifizetéshez jut. Ezért, ha az

életkor megadásával rá tudja venni az utast, hogy fogadja őt el, akkor érdemes feladnia a jellemének megfelelő viselkedésformát, hisz ezzel növeli a jóléti helyzetét. A játék normál formáját az 1. ábra tartalmazza. A kifizetések (hasonló számításokat tartalmaz Binmore (1992) 464. oldalának 10.11 ábrája) az 5. táblázatban láthatók. Az 5. táblázat kifizetéseinek kiszámításakor figyelembe vettük, hogy egy idősebb sofőr a kérdőíves felmérésünk alapján 0,177 valószínűséggel R típusú, és így értelemszerűen 0,823 valószínűséggel M típusú.

5. táblázat. Az utas–sofőr interakciójának kifizetési mátrixa.

		Utas			
		<i>ee</i>	<i>en</i>	<i>ne</i>	<i>nn</i>
Sofőr	<i>mm</i>	(2,18; 0,18)	(2,18; 0,18)	(0,18; 0,82)	(0,18; 0,82)
	<i>mn</i>	(3,00; 0,18)	(1,35; 1,00)	(2,65; 0,00)	(1,00; 0,82)
	<i>nm</i>	(2,00; 0,18)	(1,65; 0,00)	(0,35; 1,00)	(0,00; 0,82)
	<i>nn</i>	(2,82; 0,18)	(0,82; 0,82)	(2,82; 0,18)	(0,82; 0,82)

- *m*: megadja az életkorát, *n*: nem adja meg
- *e*: elfogadja az ajánlatot, *n*: nem fogadja el.

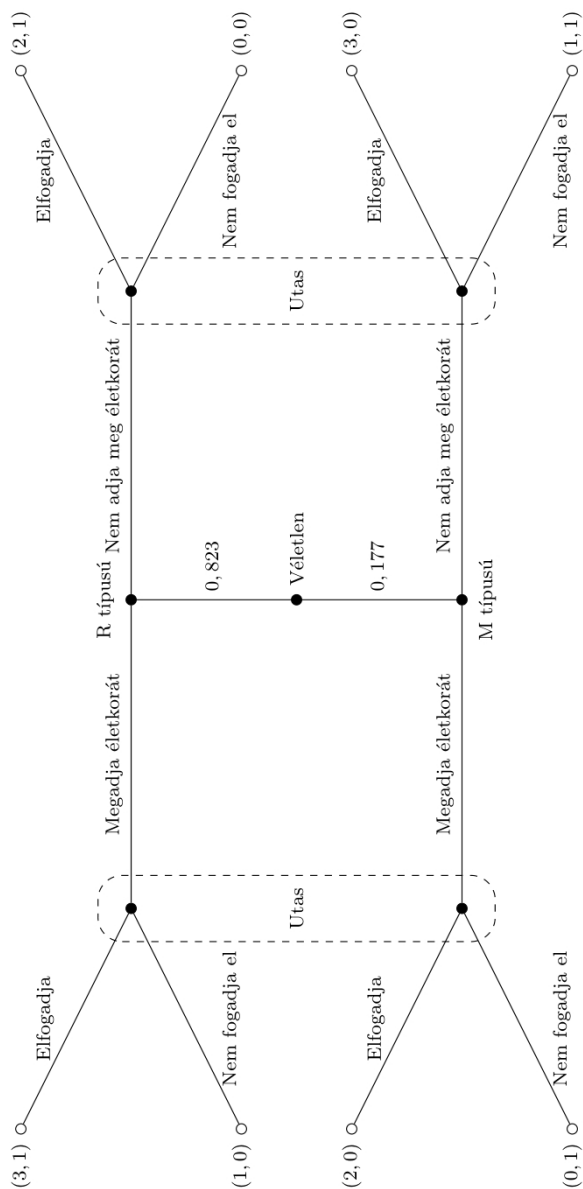
Az 5. táblázatban a zárójelben lévő első érték a sofőr, a második pedig az utas várható kifizetése. A sofőr soraiban a betűpárok első tagja minden esetben az R típusú, a második pedig az M típusú sofőrre vonatkozik, illetve az utas oszlopaiban az első betű a válasz a sofőr *m* stratégiájára, a második pedig az *n*-re.

Az 5. táblázat által bemutatott kifizetési mátrixnak nincsen tiszta stratégiai Nash-egyensúly, ezért a kevert stratégiai egyensúlyt lehet csak meghatározni. Ez a négyszer négyes mátrix esetében ugyan hagyományos úton is kiszámítható, de tanulságosabb inkább a Cho és Kreps (1987) modelljén alapuló és Binmore (1992)-ben is leírt érvelést alkalmazunk. Azaz Harsányi-transzformáció segítségével alakítjuk át a nem-teljes információjú játékot nem-tökéletes információjú játékká. Vagyis egy olyan szituációt, amikor az utas nevű játékos nem ismeri a sofőr nevű játékos típusát, átalakítunk egy másik szituációvá. Ezek szerint az utas nevű játékos csak azt tudja, hogy a sofőr nevű játékos megadja-e az életkorát vagy sem, és ebből következtet a sofőr nevű játékos típusára.

Bevezetünk a játékba egy új szereplőt, nevezzük őt Véletlennek, akinek nincs kifizetése, és a szerepe annyi, hogy ő határozza meg, hogy az idősebb sofőr R vagy M típusú lesz-e. A játék fáját az 1. ábra tartalmazza.

A Harsányi-transzformációval nem-tökéletes információjúvá alakított játékban két információs halmaz szerepel. Az egyik információs halmazba azok a sofőrök tartoznak, akik megadják életkorukat, ezt nevezzük „Declare” (Bejelent) információs halmaznak. Az R típusú sofőr D valószínűséggel, az M típusú sofőr d valószínű-

1. ábra. Az idősebb sofőr és az utas interakciójának extenzív formája



séggel adja meg az életkorát. A „None given” (Nem ad meg) információs halmazba az R típusú sofőr  $NG$ , az M típusú pedig  $ng$  valószínűséggel kerül. Értelemszerűen  $NG + D = 1$ , és  $ng + d = 1$ .

Az utas, ahogy azt már korábban említettük, a sofőr által küldött jelzést tudja csak megfigyelni, ami az életkor megadása vagy elrejtése. Mind a megadott, mind az elrejtett életkor esetén akkor fogadja el a sofőrt, ha úgy véli, hogy a sofőr nagyobb valószínűséggel R, mint M típusú.

A Bayes-tétel segítségével felírva a „None Given” információs halmazban az utas akkor fogadja el a sofőrt, ha

$$P(R \text{ típusú} \mid \text{Nem ad meg}) > P(M \text{ típusú} \mid \text{Nem ad meg}), \quad (1)$$

vagyis esetünkben ha

$$\frac{0,177NG}{0,177NG + 0,823ng} > \frac{0,823ng}{0,177NG + 0,823ng}, \quad (2)$$

amiből

$$NG > 4,6497ng, \quad (3)$$

és nem fogadja el a sofőrt, ha

$$NG < 4,6497ng. \quad (4)$$

Az utasnak randomizálnia kell az egyensúlyi helyzetben (különben lenne tiszta stratégiai Nash-egyensúly). Ha a „None Given” halmazban randomizál, akkor

$$NG = 4,6497ng. \quad (5)$$

Emiatt

$$1 - D = 4,6497 - 4,6497d, \quad (6)$$

és így

$$4,6497d = 3,6497 + D. \quad (7)$$

Hasonlóképpen az utas a „Declare” információs halmazban akkor fogadja el a sofőrt, ha

$$\frac{0,177D}{0,177D + 0,823d} > \frac{0,823d}{0,177D + 0,823d}, \quad (8)$$

vagyis ha

$$D > 4,6497d, \quad (9)$$

és nem fogadja el a sofőrt, ha

$$D < 4,6497d. \quad (10)$$

A (7) és (10) alapján ha az utas randomizál a „None Given” információs halmazban, akkor nem fogadja el a sofőrt a „Declare” információs halmazban. Ezért semmi

értelme, hogy az M típus bevallja életkorát, azaz  $ng = 1$ , és így (5) alapján  $NG = 4,6497$ , ami lehetetlen.

Mindezek következtében az idősebb sofőr és az utas találkozásának csak olyan kevert stratégiai egyensúlya van, ahol csak a „Declare” információs halmazban randomizál az utas, tehát

$$D = 4,6497d, \quad (11)$$

ami azt jelenti, hogy

$$1 - NG = 4,6497 - 4,6497ng, \quad (12)$$

vagyis

$$NG = 4,6497ng - 3,6497. \quad (13)$$

Mivel ekkor

$$NG < 4,6497ng, \quad (14)$$

a „None Given” információs halmazban nem fogadja el az utas a sofőrt. Így az R típusnak érdemes mindig bevallania az életkorát,  $D = 1$  és (11) alapján  $d = 0,2151$ . Ami azt mutatja, hogy az M típusú sofőr randomizál a „None given” és a „Declare” akció közt. A „None Given” akció mellett a kifizetése 1, ezért a „Declare” információs halmazban is 1 kell, hogy legyen a kifizetése. Ezt akkor éri el, ha  $\theta$ -val jelölve annak valószínűségét, hogy az utas elfogadja őt,

$$1 = 0 + 2\theta, \quad (15)$$

vagyis

$$\theta = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Végeredményben az R típusú sofőr mindig bevallja életkorát, az M típusú pedig 0,2151 valószínűséggel vallja azt be. A „None Given” információs halmazban az utas sose fogadja el a sofőrt, és a „Declare” információs halmazban 1/2 valószínűséggel fogadja őt el.

Kérdőíves felmérésünk szerint is az M típusú idősebb sofőrök felénél kevesebb adná meg életkorát. A Cho and Kreps (1987) modell gondolatait alkalmazva még ennél is alacsonyabb értéket kapunk, ami azonban egyértelműen függ attól, hogy az egyes viselkedésmódok milyen számszerű kifizetést eredményeznek. A modell kifizetése esetén elvi jelentése a kifizetések egymáshoz való viszonyának van: ha valaki a típusának megfelelő viselkedést tanúsít, akkor azzal kisebb előnyhöz jut, mint azzal, ha elfogadtatja magát. Ezek a következtetések teljesen megfelelnek a kérdőíves felmérésünk eredményeinek is. Bár a válaszolók közül körülbelül 82,3%-a gondolta azt, hogy számít a kor, de még közülük is körülbelül 46%-uk beírná a korát az adatlapra, vagyis rossz érzése ellenére nyilatkozna születési dátumáról.

Véleményünk szerint az M típusúak nagy aránya elsősorban a társadalmi értékítélet következménye, mely szerint az idősebbek nem alkalmasak hatékony munkavégzésre. Az utasszállításra vállalkozó idősebb polgárok valószínűleg ezért nem

írják le szívesen az életkorukat. Kérdés azonban, hogy mennyire kellene megnövekednie az R típusúak arányának ahhoz, hogy mind az R mind az M típusú sofőrnek megérje bevallania életkorát. Belátható, hogy  $x$ -szel jelölve az R típusúak részarányát, mindaddig, amíg  $x < 1/2$ , az utasnak nem érdemes elfogadnia a sofőrt a „Non given” információs halmazban, a „Declare” információs halmazban pedig érdemes randomizálnia. Ennek hatására az R típusú sofőr mindig bevallja életkorát, az M típusú pedig  $x/(1-x)$  valószínűséggel vallja azt be. Amennyiben az R típusú valószínűsége  $1/2$ -nél nagyobb lesz, akkor a játéknak létezik tiszta stratégiai egyensúlya, mint ahogy a 6. táblázat alapján látható. Az egyensúlyt (feltéve, hogy  $x$  mindig valamivel 1 alatt marad) az  $(mm; en)$  illetve az  $(nn; ne)$  stratégiapárosok alkotják.

6. táblázat. Kifizetési mátrix

		Utas			
		$ee$	$en$	$ne$	$nn$
Sofőr	$mm$	$3x + 2(1-x); x$	$3x + 2(1-x); x$	$x; 1-x$	$x; 1-x$
	$mn$	$3x + 3(1-x); x$	$3x + (1-x); 1$	$x + 3(1-x); 0$	$x + (1-x); 1-x$
	$nm$	$2x + 2(1-x); x$	$2(1-x); 0$	$2x; 1$	$0; 1-x$
	$nn$	$2x + 3(1-x); x$	$1-x; 1-x$	$2x + 3(1-x); x$	$1-x; 1-x$

A 6. táblázat celláiban lévő első értékek a sofőr, a második pedig az utas várható kifizetései. A sofőr soraiban a stratégiát jelző betűpárosok első tagja minden esetben az R típusú, a második pedig az M típusú sofőrre vonatkozik, illetve az utas oszlopaiban az első betű válasz a sofőr  $m$  akciójára, a második pedig az  $n$ -re. További jelölés:  $x$  az R típusú,  $(1-x)$  az M típusú sofőrök aránya a populációban.

Abban az esetben, ha  $1-x > x$ , nincs egyensúly a tiszta stratégiák halmazán. Ha  $x > 1-x$  (azaz  $x < 1/2$ ), akkor viszont van:  $(mm; en)$  és  $(nn; ne)$ . Vagyis vagy mindkét típus megadja az életkorát, és az utas megadott életkor esetén elfogadja az ajánlatot, de ha nem lenne megadva az életkor, akkor elutasítaná. Illetve senki nem adja meg az életkorát, és az utas ekkor elfogadja az összes sofőrt.

#### 4. Következtetések

Az előzőekben leírtakból akár arra is következtethetnénk, hogy nem kell mást tenni, csak az idősebb munkavállalók, példánkban az idősebb sofőrök véleményét megváltoztatni. Ha az M típusból sikerülne R típust faragni, akkor az egyensúlyban a sofőrnek meg kell adnia életkorát. Mivel pedig így az utas sose kerül a „Nem ad meg” információs halmazba, ezért minden valós esetben elfogadja a sofőrt. Illetve a másik egyensúlyban, ha a társadalom elfogadja az idősebb sofőrt, ha nincs megadva az életkoruk, akkor egyik típusnak se kell megjelölnie életkorát.

A kérdés azonban korántsem ilyen egyszerű. Az idősebb sofőrök vélekedése ugyanis nem független az általános társadalmi normáktól, elképzelésektől. Saját típusukat egyéni adottságaik mellett ezek a társadalmi kööttségek is alakítják. A tanulmányunkban bemutatott játék a jelenlegi társadalmi elképzelések – lásd a kérdőívezés eredményét – által meghatározott szituációt adja vissza. Ahhoz, hogy „áttranszformáljuk” az M típusú sofőrt R típusúvá, ezeket az elképzeléseket, és nem a sofőrök vélekedését kell megváltoztatnunk. A vélekedések ugyanis nem függetleníthetők az általános társadalmi elfogadottságtól. Ugyancsak a társadalmi meghatározottság következménye, ha egy adott munkavégzésre elfogadnak bárkit, életkortól függetlenül. Ekkor viszont egyáltalán nem feltételelezhető, hogy két típus, R és M alakuljon ki a sofőrök közt.

Végül arról sem szabad megfeledkeznünk, hogy az R típusúak arányának a kérdéses korosztályon belüli ceteris paribus megváltoztatása nem biztos, hogy a valóságban is minden más változatlansága mellett realizálódhat. Azaz az arányok megváltozása esetleg együtt járhat az utasok véleményének módosulásával, ami ezek után már csak másfajta modellkörnyezettel írható le.

### A. Függelék

Az online-kérdőívünk kérdései:

1. Az Ön neme?
  - Nő
  - Férfi
2. Az Ön születési éve?
3. Képzeld el, hogy valamilyen szolgáltatói feladatot vállal internetes hirdetés segítségével (pl. korrepetálás, sofőrködés, takarítás stb.). Jelentkezéskor beírhatja életkorát, de azt senki nem ellenőrzi. Véleménye szerint életkorának van jelentősége abban, hogy mennyi ügyfele (fogyasztója) lesz?
  - Igen, van jelentősége
  - Nem, nincs jelentősége
4. Ön megadna valamilyen életkort? Ne felejtse, nem szükséges megadnia a tényleges életkorát!
  - Igen
  - Nem
5. (Csak abban az esetben, ha az előbbi kérdésre igennel válaszolt.) Milyen életkort adna meg?



### Hivatkozások

- [1] ARROW, K. J.: *Higher Education as a Filter*, Journal of Public Economics, Vol. **2** No. **3**, pp. 193-216 (1973). DOI: [10.1016/0047-2727\(73\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0047-2727(73)90013-3)
- [2] BERDE, É.: *Older People in the Platform Economy*, Frontiers in Sociology, Vol. **4** No. **8** (2019). DOI: [10.3389/fsoc.2019.00008](https://doi.org/10.3389/fsoc.2019.00008)
- [3] BERDE, É. ÉS TÖKÉS, L.: *Platformokon keresztül dolgozó idősebb munkavállalók. Az idősebb sofőrök példája az Oszkárnál*, Köz-Gazdaság, online first 2020/1 (2020). URL: <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/4713/>
- [4] BINMORE, K. G.: *Fun and Games: A Text on Game Theory*. D.C. Heath, Lexington, p. 602 (1992).
- [5] BUTTON, P.: *Population Aging, Age Discrimination, and Age Discrimination Protections at the 50th Anniversary of the Age Discrimination in Employment Act*, National Bureau of Economic Research, (2020). DOI: [10.3386/w25850](https://doi.org/10.3386/w25850)
- [6] CHO, I. K. AND KREPS, D. M.: Signaling Games and Stable Equilibria. *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. **102** No. **2**, pp. 179-221 (1987). DOI: [10.2307/1885060](https://doi.org/10.2307/1885060)
- [7] HANUSHEK, E. A.: *The Economics of Schooling: Production and Efficiency in Public Schools*, Journal of Economic Literature, Vol. **24** No. **3**, pp. 1141-1177, (1986).
- [8] HARSÁNYI, J. C.: *Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, Part I. The Basic Model*, Management Science, Vol. **14** No. **3**, pp. 159-182 (1967). DOI: [10.1287/mnsc.14.3.159](https://doi.org/10.1287/mnsc.14.3.159)
- [9] HARSÁNYI, J. C.: *Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, Part II. Bayesian Equilibrium Points*. Management Science, Vol. **14** No. **5**, pp. 320-334 (1968a). DOI: [10.1287/mnsc.14.5.320](https://doi.org/10.1287/mnsc.14.5.320)
- [10] HARSÁNYI, J. C.: *Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, Part III. The Basic Probability Distribution of the Game*. Management Science, Vol. **14** No. **7**, pp. 486-502 (1968b). DOI: [10.1287/mnsc.14.7.486](https://doi.org/10.1287/mnsc.14.7.486)
- [11] HECKMAN, J. J., STIXRUD, J., AND URZUA, S.: *The Effects of Cognitive and Noncognitive Abilities on Labor Market Outcomes and Social Behavior*, Journal of Labor Economics, Vol. **24** No. **3**, pp. 411-482 (2006). DOI: [10.3386/w12006](https://doi.org/10.3386/w12006)
- [12] HUWS, U., SPENCER, N., SYRDAL, D. S., AND HOLTS, K.: *Work in the European Gig Economy: Research Results from the UK, Sweden, Germany, Austria, the Netherlands, Switzerland and Italy*, Foundation for European Progressive Studies, Brussels, (2017).
- [13] ILMAKUNNAS, P. AND MALIRANTA, M.: *Aging, Labor Turnover and Firm Performance*, ETLA Discussion Papers 1092, The Research Institute of the Finnish Economy, Helsinki, (2007). DOI: [10.2139/ssrn.984683](https://doi.org/10.2139/ssrn.984683)
- [14] KREPS, D.: *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton University Press, Princeton, (1990).
- [15] LAZEAR, E. P. and ROSEN, S.: Rank-order Tournaments as Optimum Labor Contracts. *Journal of Political Economy*, Vol. **89** No. **5**, pp. 841-864 (1981). DOI: [10.1086/261010](https://doi.org/10.1086/261010)

- [16] MINCER, J.: *Schooling, Experience, and Earnings*, Human Behavior & Social Institutions, No. 2 (1974).
- [17] OSBORNE, M. J. AND RUBINSTEIN, A.: *A Course in Game Theory*, MIT press, Cambridge, Massachusetts London (1994).
- [18] PwC, *Pwc Golden Age Index. Unlocking a Potential \$3,5 Trillion Prize from Longer Working Lives*, PricewaterhouseCoopers (2018).  
<https://www.pwc.co.uk/economic-services/golden-age/golden-age-index-2018-final-sanitised.pdf>
- [19] ROTH, A. E. AND SOTOMAYOR, M.: *Two-sided Matching*, Handbook of Game Theory with Economic Applications, Vol. 1, pp. 485-541 (1992). DOI: [10.1016/S1574-0005\(05\)80019-0](https://doi.org/10.1016/S1574-0005(05)80019-0)
- [20] SLEE, T.: *What's Yours is Mine: Against the Sharing Economy*, Or Books, New York, London (2017). DOI: [10.2307/j.ctv62hf03](https://doi.org/10.2307/j.ctv62hf03)
- [21] SPENCE, M.: *Job Market Signaling*, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 87 No. 3, pp. 355-374 (1973). DOI: [10.2307/1882010](https://doi.org/10.2307/1882010)
- [22] STIGLITZ, J. E.: *The Theory of "Screening", Education, and the Distribution of Income*, The American Economic Review, Vol. 65 No. 3, pp. 283-300 (1975).



Berde Éva 1988 óta dolgozik a Budapesti Corvinus Egyetemen, illetve jogelődjeinél. Végzettsége szerint közgazdász és matematikus. Mikroökonómiai jellegű tárgyakat tanít. Kutatási témái: a demográfia kihatásai a gazdasági életre, valamint a lakni gazdaság. 2012-ben szerezte meg habilitációját. 2015-ben egyetemi tanárnak nevezték ki. Szintén 2015-ben alapította a Közgazdasági Karon a Demográfia és Gazdaság Kutatóközpontot, mellyel azóta több pályázatot is nyertek. Az MTMT-ben több mint 120 jegyzett publikációja szerepel. Jó néhány végzett PhD hallgatója van, és jelenleg is több PhD hallgató konzulense.

#### BERDE ÉVA

Budapesti Corvinus Egyetem  
 Mikroökonómiai Tanszék  
 Egyetemi tanár  
 1093 Budapest, Fővám tér 8. - E. 223.  
[eva.berde@uni-corvinus.hu](mailto:eva.berde@uni-corvinus.hu)



Kuncz Izabella 1988-ban született Budapesten. Alapszakos diplomáját Alkalmazott közgazdaságtan szakon szerezte meg 2009-ben, 2011-ben pedig Közgazdasági elemző szakon kapott mesterszakos diplomát a Budapesti Corvinus Egyetemen. Ezt követően kezdte meg doktori tanulmányait az Általános és Kvantitatív Közgazdaságtan Doktori Iskola jogelődjében. Kutatási témája a demográfiai változások makrogazdasági hatásai. 2015-ben csatlakozott a Demográfia és Gazdaság Kutatóközponthoz. Makroökonómia és Makroökonómiai modellépítés kurzusokat tart alapszakos hallgatóknak, Haladó makroökonómiát pedig mesterszakosoknak. Oktatói munkáját 2016-ban Az Év Oktatója kitüntetéssel, illetve a 2016/2017. akadémiai évben a Budapesti Corvinus Egyetem Kenneth Rice Díjával jutalmazták, 2019-ben pedig elnyerte a Hallgatói Önkormányzattól „A félév előadója címet”, illetve Rectori Kitüntető Oklevélben részesült.

#### KUNCZ IZABELLA

Budapesti Corvinus Egyetem  
Makroökonómiai Tanszék  
egyetemi tanársegéd  
1093 Budapest, Fővám tér 8. - E. 225.  
izabella.kuncz@gmail.com

#### WHO ARE INTERESTED IN REVEALING THEIR AGE?

ÉVA BERDE, IZABELLA KUNCZ

Newly emerged platforms offer lots of working opportunities for everyone, including older people. Oszkar, the Hungarian On-line Passenger Intermediary System is one of the examples where many older people joined the platform as workers (drivers). Since the establishment of Oszkar the number of drivers has been increased continuously, and the share of older drivers has grown even more. However a significant fraction of older drivers have not revealed their age when they filled in their own form on the webpage. An online survey was used to find what older people think about their social acceptance when their age is revealed, and additionally a game theoretic model was built to describe the behavior of older drivers. Both approaches showed that there exists only a mixed equilibrium where a certain portion of older workers prefer to hide their age.

*Keywords:* Platform economics, older drivers, on-line survey, game-theoretic model

## GRÁF ALAPÚ DIMENZIÓREDUKCIÓS HEURISZTIKÁK RÉSZVÉNYPIACI KORRELÁCIÓS MÁTRIXOKRA

GERA IMRE, LONDON ANDRÁS

Az elmúlt években számos tanulmány foglalkozott részvénypiaci hozamok idősorából képzett kovariancia-, illetve korrelációs mátrixok vizsgálatával. A korrelációs mátrix becslése során jelentős statisztikai bizonytalanság léphet fel, elsősorban az idősorok véges hossza miatt. Ebben az összefoglaló jellegű cikkben különböző módszereket tárgyalunk a fellépő statisztikai bizonytalanság szűrésére. Bemutatunk egy, a véletlen mátrixok elméletén alapuló, illetve több hierarchikus klaszterezést használó eljárást. A módszerek hatékonyságát a Markowitz-féle portfólió kiválasztási feladaton teszteljük a Budapesti Értéktőzsde historikus részvény idősorain. Az összeállított portfóliókat különböző teljesítménymutatók, valamint a realizált hozam és kockázat segítségével hasonlítjuk össze. Ezen tanulmány elsősorban a szerzők korábban megjelent [10], illetve megjelenés alatt álló [8] munkáit foglalja össze.

### 1. Bevezetés

A korrelációs mátrixok fontos részét képzik a pénzügyi közgazdaságtannak, elsősorban a portfólió elméletnek és a kockázatmenedzsmentnek. A különböző részvények hozamai közti korrelációt használják például az egyes részvényekbe fektetett tőkearányok meghatározásához úgy, hogy a befektető vállalt kockázata lehetőleg minél kisebb legyen [6]. A korrelációs mátrixokból egyszerű módon képezhetünk gráfokat is. Egy *részvénygráfban* a csúcsok a cégeket (részvényeket), míg a súlyozott élek az árfolyamuk közötti Pearson-korrelációs együtthatót jelentik [5, 12, 17]. Amennyiben gráfként tekintünk ezekre a korrelációs mátrixokra, a gráf alapú adatbányászat, illetve a hálózattudomány széles eszköztára válik elérhetővé [1]. Mindazonáltal a közvetlen gráffá alakítás nem evidens, hiszen a korrelációs mátrixok tényleges információtartalmának meghatározása kulcsszerepet tölt be az alkalmazások területén, különösen a pénzügyi kockázatkezelésben. A korrelációs mátrix múltbéli adatokból való számításához (becsléséhez) jelentős mértékű statisztikai bizonytalanság (zaj) társul a hozamok idősorának véges hossza miatt [25]. Manapság több módszer jelent meg a statisztika, az ökonofizika és a hálózattudomány szakirodalmában a probléma kezelésére, ld. például [4, 9, 22, 24].

Valamennyi módszer azon az elven alapul, hogy meghatározzuk a korrelációs mátrix „információs magját”, ami robusztus a statisztikai bizonytalansággal szemben. Az egyik megközelítés a *véletlen mátrixok elméletén* alapszik. A modellben az empirikus (becsült) korrelációs mátrix és egy *null modell* mátrix sajátértékeit hasonlítjuk össze. A null modell mátrixot általában egy, az empirikussal azonos hosszúságú, véletlen idősorból származtatjuk. Egy hasonló megközelítés, melyet a pénzügyi szakirodalomban alkalmaznak, a főkomponens-analízis [7]. Más szűrési módszerek *hierarchikus klaszterező* eljárásokat alkalmaznak, pl. [12] vagy [22].

Ezen tanulmányban röviden összefoglaljuk az imént említett módszerek alap gondolatait, továbbá megadunk egy új, szintén null modell alapú megközelítést (2. szakasz). Ezután esettanulmányban mutatjuk be a különböző módszerekkel „tisztított” korrelációs mátrixok segítségével meghatározott részvény portfóliók teljesítményét különböző mutatók mentén (3. szakasz). Végül rövid összegzés után megemlítünk néhány potenciális jövőbeni kutatási irányt is (4. szakasz).

## 2. Korrelációs mátrixok tisztítása

Legyen  $X_i \equiv \{x_i(t) : t = 1, 2, \dots, T\}$  egy idősor, ami egy  $i$  elem értékét reprezentálja ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) a  $t = 1, 2, \dots, T$  időpontokban. Speciálisan a részvénypiacot vizsgálva  $i$  egy részvény,  $x_i(t)$  pedig a  $t - 1$  és  $t$  időpontok közti logaritmikus hozama, azaz

$$x_i(t) = \log \frac{P_i(t)}{P_i(t-1)},$$

ahol  $P_i(t)$  az  $i$  részvény értéke (ára) a  $t$  időpontban. Egy  $n$  részvényből álló piacot gyakran vizsgálnak a  $\mathbf{C}$  korrelációs mátrixon keresztül, ami statisztikai úton méri a páronkénti függőségeket. A mátrix  $C_{ij}$  eleme az  $i$  és  $j$  részvények közti *Pearson korrelációs együttható*, vagyis

$$C_{ij} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i) \cdot \text{Var}(X_j)}},$$

ahol

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \overline{X_i \cdot X_j} - \overline{X_i} \cdot \overline{X_j}$$

az  $X_i$  és  $X_j$  véletlen változók kovarianciája,  $\text{Var}(X_i) = \text{Cov}(X_i, X_i) = \sigma_i^2$  az  $X_i$  autokovarianciája. Az  $\overline{X_i}$  becsült érték az  $X_i$  megfigyeléseinek időbeli átlaga, azaz

$$\overline{X_i} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_i(t),$$

$$\overline{X_i X_j} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_i(t) x_j(t).$$

## 2.1. Véletlen mátrixok

Egy véletlen mátrix olyan mátrix, melynek elemei véletlenül generált számok valamilyen adott valószínűségi eloszlás szerint [15]. A portfólió elmélet szempontjából a véletlen mátrixok elmélete (Random Matrix Theory, röviden RMT) egy természetes módszertant szolgáltat a korrelációs mátrixok becsléséből adódó statisztikai bizonytalanság kiszűrésére [22]. Legyenek adottak  $n$  részvény  $T$  hosszú árfolyam idősorai, és tegyük fel, hogy a hozamok független, normális eloszlású véletlen változók 0 várható értékkel és  $\sigma^2$  varianciával; vagyis adott egy  $n \times T$  méretű  $\mathbf{W}$  Wishart mátrix. Ekkor határértékben, ha  $n \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$ , de  $Q = T/n$  rögzített, akkor ezen idősorokból képzett  $\mathbf{W}\mathbf{W}^\top$  korrelációs mátrix sajátértékeinek  $\mathcal{P}_{\text{RMT}}(\lambda)$  eloszlása a *Marchenko-Pastur törvény* szerint

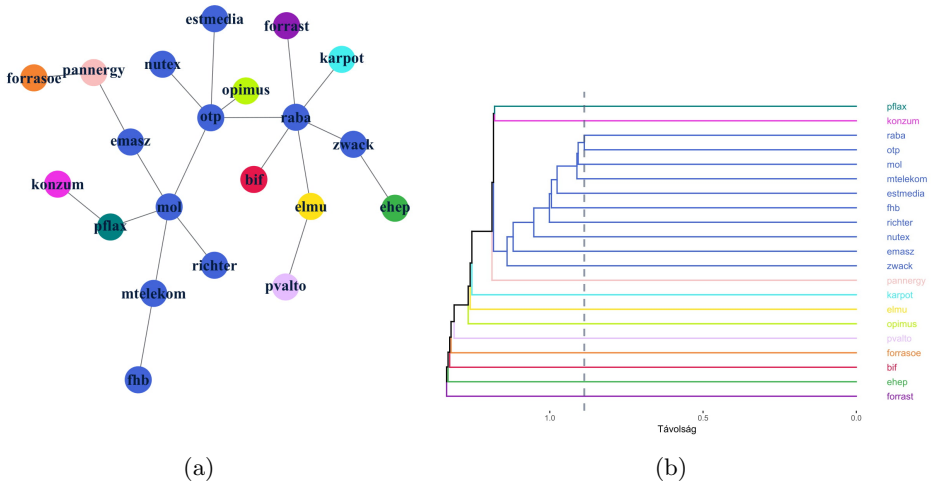
$$\mathcal{P}_{\text{RMT}}(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_{\min})(\lambda_{\max} - \lambda)}}{\lambda},$$

ahol  $\lambda_{\min}$  és  $\lambda_{\max}$  a mátrix legkisebb, illetve legnagyobb sajátértékei [21], melyek

$$\lambda_{\max, \min} = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{Q} \pm 2\sqrt{\frac{1}{Q}}\right)$$

alakban adóttak, ahol  $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ ,  $\sigma^2$  pedig  $\mathbf{W}$  elemeinek varianciája.

Korábbi tanulmányok rámutattak, hogy részvényárfolyam idősorokból képzett korrelációs mátrixok legnagyobb sajátértéke jelentősen eltér (nagyobb) a véletlen null modellként használatos korrelációs mátrix előbbi  $\lambda_{\max}$  sajátértékétől [9, 18]. Elemzők úgy gondolják, hogy a valós adatokból becsült korrelációs mátrix legnagyobb sajátértéke a piac „globális” viselkedését tükrözi [9]. Mivel a Marchenko-Pastur eloszlás csak az  $n \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$  esetben teljesül pontosan, ezért az összehasonlításhoz a valós paraméterekkel megegyező  $n$  és  $T$  értékeket használva szokás véletlen  $\mathbf{C}_{\text{RMT}}$  mátrixot generálni és ezt összehasonlítani az eredeti  $\mathbf{C}$  korrelációs mátrixszal. Mivel  $\text{Trace}(\mathbf{C}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$ , ezért pl. ha a generált véletlen mátrix elemeinek varianciája  $\sigma_{\text{RMT}}^2 = 1$ , akkor a variancia azon része, amelyet a legnagyobb sajátérték nem magyaráz, a  $\sigma_0^2 = 1 - \lambda_{\max}/n$  értékkel becsülhető. Ennek segítségével határozzuk meg a  $\mathbf{C}_{\text{RMT}}$  mátrix  $\lambda_{\max}$  és  $\lambda_{\min}$  értékeit. Az eljárás a  $\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top$  szinguláris érték felbontásával (SVD) folytatódik, ahol  $\mathbf{\Lambda}$  a mátrix sajátértékeit csökkenő sorrendben tartalmazó diagonális mátrix,  $\mathbf{U}$  pedig az a mátrix, amelynek sorai rendre az ezen sajátértékekhez tartozó sajátvektorok. A zajtisztítás standard módon történik: a  $\mathbf{\Lambda}$  mátrixban  $\mathbf{C}$  azon sajátértékeit, melyek a kiszámított  $\lambda_{\max}$ -nál kisebbek, 0-ra állítjuk (legyen a kapott mátrix  $\mathbf{\Lambda}'$ ) és elvégezzük az  $\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}'\mathbf{U}^\top$  szorzást. Végül a kapott mátrix főátlóbeli elemeit visszaállítjuk 1-re.



1. ábra. Egy részvénygráfon képzett minimális feszítőfa (a) és a hozzá kapcsolódó single-linkage hierarchikus klaszterezés dendrogramja (b).

## 2.2. Részvény gráfok

Lévén, hogy a  $\mathbf{C}$  korrelációs mátrix egy szimmetrikus  $n \times n$ -es mátrix, tekintethetünk rá egy súlyozott gráf szomszédsági mátrixaként is. Ebben a gráfban a csúcsok a részvényeket jelölik, a súlyozott élek pedig a részvénytársítások korrelációs együtthatóit. Az irodalomban  $\mathbf{C}$ -t gyakran transzformálják egy  $\mathbf{D}$  távolságmátrixszá, ahol  $D_{ij} = \sqrt{2(1 - C_{ij})}$  [22, 23]. Az így kapott  $D_{ij}$  egy ún. ultrametrikus távolság. Az ultrametrikus távolságok ultrametrikus tereket határoznak meg, és a következő axiómákat teljesítik: (i)  $D_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$ , (ii)  $D_{ij} = D_{ji}$  és (iii)  $D_{ij} \leq \max\{D_{ik}, D_{kj}\}, \forall (i, j, k)$ ; erre egy rövid bizonyítás megtalálható pl. [12]-ben. A módszert korábban többször használták már, mivel a kapott távolságmérték lehetővé teszi gráfalgoritmusok (pl. minimális feszítőfa keresés), illetve hierarchikus klaszterező eljárások alkalmazását [13]. Az ultrametrikus terek alkalmazásaira itt nem térnénk ki ennél részletesebben, az érdeklődő olvasónak a [20] összefoglaló tanulmányt ajánljuk.

Egy egyszerű tisztítási technika a  $\mathbf{C}$  (vagy  $\mathbf{D}$ ) értékeinek küszöbölése, ezáltal csak azon élek meghagyása, melyek nagyobbak (kisebbek) egy tetszőlegesen választott küszöbértéknél. Habár a módszer hatékonyan kiküszöböli a leggyengébb korrelációkat, amelyeket vélhetően az idősorok véletlen fluktuációi okoztak, egy nem megfelelően választott küszöbértékkel fontos strukturális jellemzőket dobhatunk el a részvénygráfból.

Egy másik technika, amely nem igényel globális küszöbértéket, az ún. minimális feszítőfa alapú megközelítés. Ez csökkenti a gráfban az élek számát  $n \cdot (n - 1)/2$ -ről  $n - 1$ -re, megtartva a legfontosabb korrelációkat és a gráf összefüggőségét (1a. ábra). Az eljárás szorosan köthető az egyszeres kötésű („single-linkage”) agglomeratív hierarchikus klaszterezéshez [12] (1b. ábra). Analóg módon használható az átlagos kötést („average-linkage”) használó módszer is. A megközelítés feltételezi, hogy az eredeti korrelációkat jól közelítik a szűrt értékek. Ahhoz, hogy kevesebb információt veszítsünk, használható az ún. maximálisan szűrt síkgráf módszer is [24]. Ez a módszer megtartja a minimális feszítőfa építéséhez használt korrelációkat, illetve néhány további információt is, garantálva, hogy az eredmény egy síkgráf, legfeljebb  $3n - 6$  éllel.

### 2.3. Konfigurációs modell és közösségkeresés részvénygráfokban

Részvénygráfok esetén is természetes módon merül fel olyan gráfalapú adatbányászati módszerek használata, mint a közösségkeresés, a közvetlen alkalmazás azonban problematikus lehet. A [11] cikkben a szerzők megmutatták, hogy a korrelációs mátrixot közvetlenül súlyozott gráfként tekintve a modularitás maximalizálás, mint standard közösségkereső eljárás, torzított eredményekhez vezethet (és ugyanez igaz más közösségkereső eljárásokra is). Ennek fő oka, hogy a modularitás függvényben az erősebben korreláló csúcspárok nem feltétlenül kapnak kellően nagy súlyt, ez azonban egy klaszterező eljárásnál kívánatos lenne. A szerzők több, speciálisan korrelációs mátrixokra definiált változatát adták meg a modularitásfüggvénynek. Itt mi egy sokkal egyszerűbb utat választunk. Az eredeti korrelációs mátrixot egy null modell mátrix segítségével tisztítjuk és az így kapott mátrixot megfelelő módon egy távolságmátrixszá alakítjuk. Ezt követően hierarchikus klaszterezést alkalmazunk a távolságmátrixon, mint egyfajta heurisztikát egy modularitás-szerű függvény maximalizálására. Az agglomeratív hierarchikus klaszterezés egy bináris összeolvasztási fát (más néven dendrogramot) épít, amelynek kezdeti elemei (levelei) esetünkben az egyes részvények. A folyamat alulról felfelé haladva minden lépésben valamely távolságfogalom szerint a két legközelebbi adatpontot egy közös csúcsban vonja össze és ezt az összevonást addig ismétli, amíg egyetlen (gyökér) csúcsban egyesül az összes adatpont (részvény). A leggyakrabban használt távolságfogalmak között szerepel két klaszter minimális távolsága (single-linkage), átlagos távolsága (average-linkage) és a maximális távolsága (complete-linkage) [16].

Legyen  $\mathbf{C}^0$  egy  $n \times n$ -es null modell korrelációs mátrix, melynek  $C_{ij}^0$  eleme az átlagos korreláció az  $i$  és  $j$  között valamilyen null modell alatt. Például azt feltételezve, hogy minden részvény korrelálatlan,  $\mathbf{C}^0$  az  $n \times n$ -es egységmátrix lenne. Mi egy konfigurációs modellt használunk null modellként, hogy  $C_{ij}^0$ -t generáljuk, a (korrelációs gráfbeli) élek „átdrótozásával”, véletlenszerűen és egymástól függetlenül. A feltételezés az, hogy a generált  $\mathbf{C}^0$  korrelációs mátrix megtartja minden  $i$  részvény súlyozott fokszámát (vagyis erősségét), tehát  $C_i^0 = \sum_j C_{ij}$  amennyi-

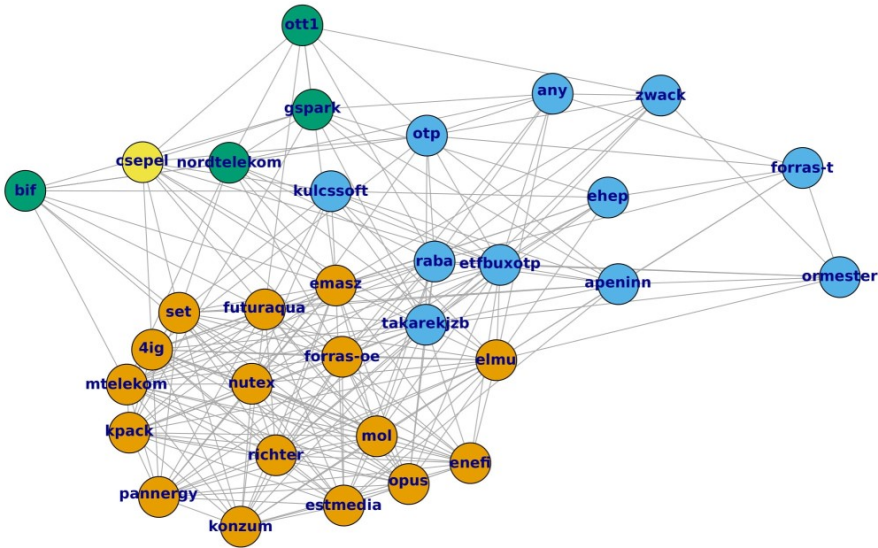


re csak lehet állandó, miközben a korrelációs szerkezet véletlenítve van. További részletekért ld. pl. [14].

Ezután egyszerűen a  $\mathbf{C}' = |\mathbf{C} - \mathbf{C}^0|$  mátrixot tekintjük a tisztított korrelációs mátrixként. Ez alapján definiáljuk az újraskálázott  $\mathbf{D}_c = -\mathbf{C}' + |\min \mathbf{C}'| + |\max \mathbf{C}'|$  távolságmátrixot, ami egy, a korrelációs mátrixhoz kötődő súlyozott gráfként is értelmezhető. Itt a csúcsok között a kisebb távolságok a köztük lévő nagyobb korrelációra utalnak. Ezt követően hierarchikus klaszterezést végzünk a  $\mathbf{D}_c$  mátrixon. Ez a módszer tulajdonképpen nem más, mint a modularitás függvény maximalizálására megadott „gyors mohó” („fast-greedy”, vagy Leuven [3]) algoritmus. A maximalizálandó függvény megadható

$$M = \sum_{i,j} |C_{ij} - C_{ij}^0| \delta_{ij}$$

alakban, ahol  $\delta_{ij} = 1$ , ha  $i$  és  $j$  csúcsok azonos klaszterbe kerülnek, különben  $\delta_{ij} = 0$ . A cél a csúcsok klaszterekbe sorolása úgy, hogy az  $M$  érték a lehető legnagyobb legyen. A maximalizáláshoz alkalmazott hierarchikus klaszterezés heurisztika eredményeképpen egy *dendrogramot* kapunk, amelyet egy tetszőleges, a gyökértől számított  $k$ -adik szinten elvágva  $k$  darab részvényklasztert kapunk (2. ábra).



2. ábra. A  $\mathbf{D}_c$  részvénygráf az 1,37-nél nagyobb súlyú éleivel,  $k = 4$  klaszterrel.

### 3. Kísérleti eredmények

Korrelációs (vagy kovariancia) mátrixokat gyakran alkalmaznak a portfólió kiválasztás probléma megoldására. A különböző tisztítási módszerek teljesítményét a tisztított mátrixok segítségével összeállított portfóliók különböző teljesítménymutatóin keresztül mérhetjük. Jelen tanulmányban a Budapesti Értéktőzsdén (BUX) jegyzett részvények záró ár idősorait használva mutatunk be esettanulmányt. További kísérleti eredmények megtalálhatók a szerzők [8, 10] cikkeiben, illetve a bevezetésben hivatkozott publikációkban.

#### 3.1. Adatok

A kísérleteinkhez a Budapesti Értéktőzsde adatai alapján egy részvényhalmaz napi záró árait használtuk fel. Itt a leghosszabban aktív 33 részvényt választottuk ki ( $n = 33$ ,  $T = 1962$  rekord, 2011-11-29 és 2019-10-18 között).

#### 3.2. Markowitz-modell

A *Markowitz-féle portfólió kiválasztási probléma* egy olyan optimalizálási feladat, ahol a befektető egy olyan portfóliót szeretne összeállítani a tőzsdei részvényekből (illetve egyéb pénzpiaci termékekből), amely minimális kockázattal és legalább egy adott mértékű várható hozammal bír. A portfóliót egy  $\mathbf{p}$  vektorral adjuk meg, melynek az elemei az egyes részvényekbe fektetendő tőkearányokat jelölik. Feltesszük, hogy  $\sum_i p_i = 1$ . Például a  $\mathbf{p} = (0,2; 0,8)$  azt jelenti, hogy az első részvénybe fektetjük a pénzünk 20%-át, a másodikba pedig a maradék 80%-ot. Az optimális portfóliónak két feltételt kell kielégítenie. Először is a  $\sum_i p_i \bar{X}_i$  becsült hozam legyen legalább egy előre adott érték. Másodszor pedig minimális kockázattal kell bírnia, ahol a kockázatot a  $\mathbf{p}\Sigma\mathbf{p}^\top$  módon számítjuk. Itt a  $\Sigma$  a kovarianciamátrixa a figyelembe vett részvényeknek. A negatív  $p_i$  súlyok, azaz az ún. *rövidre eladás* („short-selling”) is megengedett.

#### 3.3. Egy lehetséges kísérleti módszertan és kiértékelések

Az árfolyam idősorokon a következő mozgóablak módszert alkalmazhatjuk a korreláció (és kovariancia) mérésére és az optimalizálási feladat megoldására. Először meghatározzuk a korrelációs mátrixot a  $[t_0, t_0 + \Delta T]$  időablakban, majd végrehajtjuk a különböző tisztítási eljárásokat (ezáltal, visszatranszformálva a korrelációs mátrixokat, újabb kovarianciamátrixokat kapunk), ld. még [22]. Megoldjuk az optimalizálási feladatot mindegyik mátrix esetén (lecserélve az eredeti  $\Sigma$  mátrixot), különböző portfólió vektorokat kapva eredményül. Itt ez most hat feladat megoldását jelenti minden  $t_0$  kezdőidőpontra: (1) eredeti Markowitz-modell megoldása, (2) RMT tisztított kovarianciamátrix használata („RMT”), (3-6) hierarchikus klaszterezés alapú tisztítás (i) a  $\mathbf{D}$  részvénygráfon („C\_Single” és „C\_Average”), valamint (ii) a  $\mathbf{D}_c$  konfigurációs modell alapú részvénygráfon („Conf\_Single” és

„Conf\_Average”). A klaszterező eljárások esetében a portfólió kiválasztási stratégiát azzal bővítettük, hogy az optimalizáláshoz klaszterenként egyetlen véletlenszerűen kiválasztott részvényt használhattunk fel. A portfóliók teljesítményét végül a  $[t_0 + \Delta T, t_0 + 2\Delta T]$  időintervallum végén értékeltük ki,  $t_0 \in \{0, 10, 20, \dots, T - 2\Delta T\}$  és  $\Delta T = 100$  paraméterek mellett. Minden  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  portfólióra kiszámoltuk a realizált hozamot a

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{P_i(t_0 + 2\Delta T) - P_i(t_0 + \Delta T)}{P_i(t_0 + \Delta T)}$$

képlettel, az előzetes Sharpe hányadost (a becsült hozam és becsült kockázat hányadosa, a  $[t_0, t_0 + \Delta T]$  intervallumon számolva) és a kockázati hányadost, ami a ‘realizált’  $[t_0 + \Delta T, t_0 + 2\Delta T]$  intervallumon számolt) és becsült kockázat hányadosa. Ezen felül meghatároztuk minden portfólióban az aktív részvények számát is: egy részvényt akkor tekintünk aktívnek, ha az nem szerepel az összeállított portfólióban.

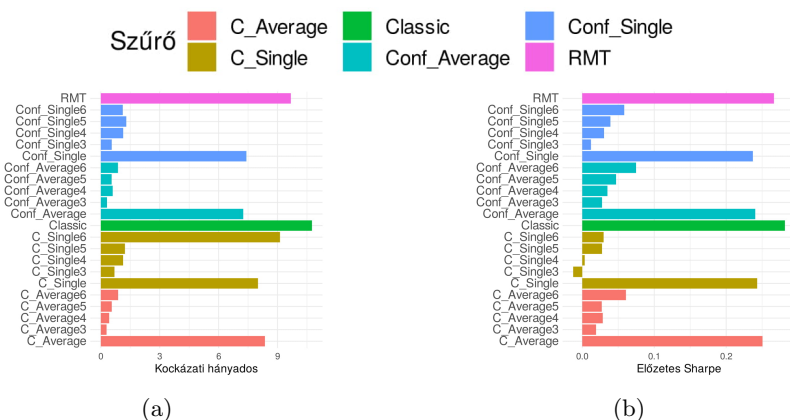
A kísérletek számítógépes megvalósítása R [19] nyelven készült, a 3.2. szekcióban ismertetett kvadratikusan programozási feladat megoldását a **quadprog** [2] csomag megoldójával számítottuk ki. Az elvárt minimális hozam értékét dinamikusan, a részvények várható hozamának átlaga és maximuma között 80-20% arányban állítottuk be minden  $t_0$  kezdőpillanatra.

### 3.4. Eredmények összefoglalása

Az alábbiakban bemutatott eredményeknél és az ábrákon a következő rövidítéseket használjuk: a „Classic” az eredeti Markowitz-modell, az „RMT” a Véletlen Mátrix Elmélet, „C” a hierarchikus klaszterezés, „Conf” a pedig a konfigurációs modell részvénygráfián végrehajtott klaszterezésre utal. Utóbbi kettő esetében a „Single” és „Average” a klaszterezésnél használt távolságfogalmat definiálják. A  $k \in \{3, \dots, 6\}$  szám a jelölés végén arra utal, hogy  $k$  klasztert vettünk és mindegyikből egy részvényt használtunk a kovarianciamátrix elkészítéséhez.

A végrehajtott kísérleteink azt mutatják, hogy a bevezetett módszerekkel szűrt kovarianciamátrixok segítségével előállított portfóliók általánosságban javulást mutatnak, főként a becsült és realizált kockázat hányadosában. Ahogyan a 3a. ábra is mutatja, a klaszterezésen alapuló módszerek lényegesen jobb becslést adtak a realizált kockázatra, mint a szűrés nélküli Markowitz modell, különösen akkor, amikor klaszterenként 1-1 részvényt engedtünk csak választani. Ezek közül a konfigurációs modell segítségével végzett szűrések még tovább csökkentették a realizált és becsült kockázat hányadosát. Az előzetes Sharpe hányados (3b. ábra) az eredeti Markowitz-modell esetén adta a legjobb értéket, ehhez az RMT értéke állt legközelebb. Ezt annak tulajdonítjuk, hogy az eredeti modell jelentősen alulbecsülte a kockázatot, ezzel csökkentve a mérőszám nevezőjében szereplő értéket és megnövelve a hányadost. Megfigyelhető, hogy ez a hányados jelentősen csökkent

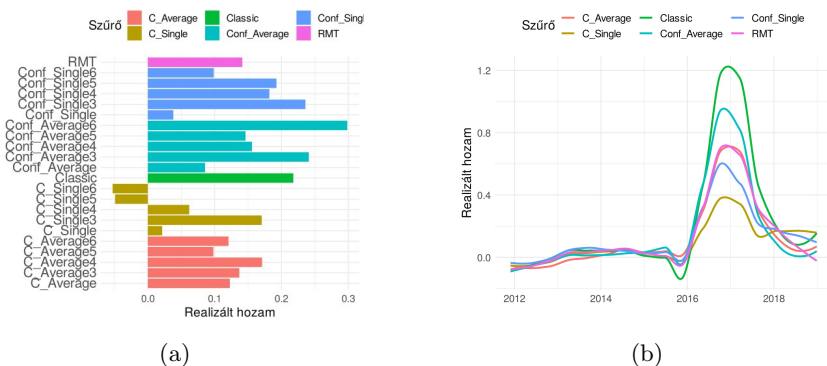
a klaszterenkénti egy részvény használatának bevezetésével. A realizált hozamok esetében (4a. és 4b. ábra) a klaszterezési eljárások klaszterenként 1-1 részvény felhasználásával magasabb hozamot tudtak produkálni, mint az eredeti modell, ám az alap módszerekkel ezt nem sikerült elérni ezen az adatsoron. Ezek közül az RMT teljesített a legjobban.



3. ábra. Átlagos kockázati hányadosok és Sharpe hányadosok a Budapesti Értéktőzsde adatain.

#### 4. Összefoglalás

Ezen tanulmányban korrelációs mátrixok vizsgálatára és gráfalapú adatbányászatra használt módszerek segítségével klaszterezési eljárásokat mutattunk be és hajtottunk végre részvénygráfokon, amelyeket pénzügyi idősorok szűrt korrelációs mátrixaiból készítettünk. Megadtunk egy részvényallokációs stratégiát, amely a kigyűjtött klaszterstruktúrán és a Markowitz portfólió modellen alapszik. Az eredményeink fenti tárgyalása azt mutatja, hogy a korrelációs mátrixok tisztítására használt módszerek képesek a kockázatbecslés tekintetében megbízható portfóliókat összeállítani és az eredeti Markowitz-moddal összevetve kompetitívnek mondhatók a realizált hozamok tekintetében is. A részvénygráfok különböző szűrési procedúrák alapján való definiálása és a klaszter alapú részvénykiválasztási stratégiák számos további kérdést hagynak nyitva a jövőbeli vizsgálatok számára. További kiterjesztési lehetőség különböző hozambecslések alkalmazása (mint pl. a *James-Stein* becslés), illetve az RMT más eredményeinek felhasználása. További vizsgálatok tárgyát képezheti az optimális portfólió méret meghatározása (ugyanis a valóságban általában jelentős tranzakciós költségekkel kell számolni), a befektetési időszak hosszának optimalizálása, valamint a realizált hozamok időbeli alakulása is (ld. pl. 4b. ábra).



4. ábra. Átlagos és időbeli realizált hozamok a BUX adathalmazon.

1. táblázat. Összefoglaló táblázat a szűrési módszerek eredményeiről.  
Az oszlopokban az átlagok, mögöttük zárójelben a szórás látható.

Szűrés	$k$	Hozam	Kock. hányados	Pre-Sharpe	Aktív részv.
Classic	–	0.2177 (0.779)	10.7536 (57.305)	0.2816 (0.348)	31.2712 (0.493)
C_Average	3	0.1369 (0.686)	0.2907 (1.158)	0.0192 (0.153)	3.0000 (0.000)
C_Average	4	0.1709 (0.753)	0.4242 (0.948)	0.0285 (0.167)	4.0000 (0.000)
C_Average	5	0.0981 (0.604)	0.5553 (1.410)	0.0271 (0.194)	5.0000 (0.000)
C_Average	6	0.1207 (0.780)	0.8801 (2.869)	0.0607 (0.222)	6.0000 (0.000)
C_Average	–	0.1227 (0.645)	8.3576 (48.182)	0.2505 (0.298)	31.2712 (0.494)
C_Single	3	0.1704 (0.673)	0.6936 (1.361)	-0.0126 (0.164)	3.0000 (0.000)
C_Single	4	0.0619 (0.566)	1.1338 (2.558)	0.0034 (0.171)	4.0000 (0.000)
C_Single	5	-0.0490 (0.656)	1.2277 (2.322)	0.0275 (0.163)	5.0000 (0.000)
C_Single	6	-0.0527 (0.752)	9.1248 (100.466)	0.0297 (0.226)	6.0000 (0.000)
C_Single	–	0.0214 (0.753)	8.0039 (49.410)	0.2430 (0.270)	31.2712 (0.494)
Conf_Average	3	0.2409 (1.195)	0.3130 (0.934)	0.0275 (0.124)	3.0000 (0.000)
Conf_Average	4	0.1558 (0.653)	0.6039 (1.735)	0.0350 (0.131)	4.0000 (0.000)
Conf_Average	5	0.1461 (0.822)	0.5494 (1.212)	0.0470 (0.153)	5.0000 (0.000)
Conf_Average	6	0.2985 (1.108)	0.8718 (2.764)	0.0747 (0.182)	6.0000 (0.000)
Conf_Average	–	0.0856 (0.678)	7.2534 (45.687)	0.2404 (0.276)	31.2712 (0.494)
Conf_Single	3	0.2358 (0.934)	0.5539 (0.819)	0.0121 (0.128)	3.0000 (0.000)
Conf_Single	4	0.1819 (0.827)	1.1377 (3.065)	0.0303 (0.126)	4.0000 (0.000)
Conf_Single	5	0.1925 (1.092)	1.2952 (3.170)	0.0391 (0.127)	5.0000 (0.000)
Conf_Single	6	0.0986 (1.413)	1.1168 (1.744)	0.0583 (0.131)	6.0000 (0.000)
Conf_Single	–	0.0380 (0.761)	7.4137 (46.319)	0.2371 (0.267)	31.2712 (0.494)
RMT	–	0.1414 (0.570)	9.6779 (52.950)	0.2664 (0.314)	31.2712 (0.493)

## Köszönetnyilvánítás

A kutatás az EFOP-3.6.1-16-2016-00008 számú projekt támogatásával készült.

Gera Imrét az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programja támogatta.

Köszönjük továbbá az anonim bírálók alapos munkáját, javasataik jelentősen hozzájárultak a cikk minőségének javításához.



NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI  
ÉS INNOVÁCIÓS HIVATAL

## Hivatkozások

- [1] ALBERT-LÁSZLÓ BARABÁSI: *Network science*, Cambridge University Press, (2016). DOI: [10.1098/rsta.2012.0375](https://doi.org/10.1098/rsta.2012.0375)
- [2] A. BERWIN AND ANDREAS WEINGESSEL: *quadprog: Functions to solve Quadratic Programming Problems*, R package version 1.5-5. 2013.  
<https://cran.r-project.org/web/packages/quadprog/index.html>
- [3] VINCENT D. BLONDEL, JEAN-LOUP GUILLAUME, RENAUD LAMBIOTTE AND ETIENNE LEFEBVRE: *Fast unfolding of communities in large networks*, Journal of Statistical Mechanics, P10008 (2008). DOI: [10.1088/1742-5468/2008/10/P10008](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/10/P10008)
- [4] JOËL BUN, JEAN-PHILIPPE BOUCHAUD AND MARC POTTERS: *Cleaning large correlation matrices: tools from random matrix theory*, Physics Reports, Vol. **666**, pp. 1-109 (2017). DOI: [10.1016/j.physrep.2016.10.00](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.10.00)
- [5] K. TSE CHI, JING LIU AND FRANCIS C.M. LAU: *A network perspective of the stock market*, Journal of Empirical Finance, Vol. **17** No. **4**, pp. 659-667 (2010). DOI: [10.1016/j.jempfin.2010.04.008](https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2010.04.008)
- [6] EDWIN J. ELTON, MARTIN J. GRUBER, STEPHEN J. BROWN AND WILLIAM N. GOETZMANN: *Modern portfolio theory and investment analysis*, John Wiley & Sons, (2009).
- [7] ROBERT F. ENGLE, VICTOR K. NG AND MICHAEL ROTHCHILD: *Asset pricing with a factor-ARCH covariance structure: Empirical estimates for treasury bills*, Journal of Econometrics, Vol. **45** No. **1-2**, pp. 213-237 (1990). DOI: [10.1016/0304-4076\(90\)90099-F](https://doi.org/10.1016/0304-4076(90)90099-F)
- [8] IMRE GERA AND ANDRÁS LONDON: *Portfolio selection based on a configuration model and hierarchical clustering for asset graphs*, Proceedings of the MATCOS'19, (2019). (megjelenés alatt)
- [9] LAURENT LALOUX, PIERRE CIZEAU, JEAN-PHILIPPE BOUCHAUD AND MARC POTTERS: *Noise dressing of financial correlation matrices*, Physical Review Letters, Vol. **83** No. **7**, p. 1467 (1999). DOI: [10.1103/PhysRevLett.83.1467](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.1467)
- [10] ANDRÁS LONDON, IMRE GERA AND BALÁZS BÁNHÉLYI: *Markowitz Portfolio Selection Using Various Estimators of Expected Returns and Filtering Techniques for Correlation Matrices*, Acta Polytechnica Hungarica, Vol. **15** No. **1**, pp. 217-229 (2018). DOI: [10.12700/APH.15.1.2018.1.13](https://doi.org/10.12700/APH.15.1.2018.1.13)

- [11] MEL MACMAHON AND DIEGO GARLASCHELLI: *Community detection for correlation matrices*, Physical Review E, Vol. **5**, p. 21006 (2013). DOI: [10.1103/PhysRevX.5.021006](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.021006)
- [12] ROSARIO N. MANTEGNA: *Hierarchical structure in financial markets*, The European Physical Journal B, Vol. **11** No. **1**, pp. 193-197 (1999). DOI: [10.1007/s100510050929](https://doi.org/10.1007/s100510050929)
- [13] K.V. MARDIA, J.T. KENT AND J.M. BIBBY: *Multivariate Analysis*, Academic Press, London-New York-Toronto-Sydney-San Francisco, Vol. **15**, p. 518 (1979).
- [14] NAOKI MASUDA, SADAMORI KOJAKU AND YUKIE SANO: *Configuration model for correlation matrices preserving the node strength*, Physical Review E, Vol. **98** No. **1**, p. 12312 (2018). DOI: [10.1103/PhysRevE.98.012312](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.012312)
- [15] MADAN LAL MEHTA: *Random matrices*, Academic Press, Vol. **142** (2004).
- [16] FRANK NIELSEN: *Hierarchical Clustering*, pp. 195-211, Febr. (2016). ISBN: 9783-319-21902-8. DOI: [10.1007/978-3-319-21903-5\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-21903-5_8)
- [17] J-P ONNELA, KIMMO KASKI AND JÁNOS KERTÉSZ: *Clustering and information in correlation based financial networks*, The European Physical Journal B, Vol. **38** No. **2**, pp. 353-362 (2004). DOI: [10.1140/epjb/e2004-00128-7](https://doi.org/10.1140/epjb/e2004-00128-7)
- [18] VASILIKI PLEROU, PARAMESWARAN GOPIKRISHNAN, BERND ROSENOW, LUÍS A. NUNES AMARAL AND H. EUGENE STANLEY: *Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series*, Physical Review Letters, Vol. **83** No. **7**, p. 1471 (1999). DOI: [10.1103/PhysRevLett.83.1471](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.1471)
- [19] R. CORE TEAM: *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, (2019). <https://www.R-project.org/>
- [20] RAMMAL RAMMAL, GÉRARD TOULOUSE AND MIGUEL ANGEL VIRASORO: *Ultrametricity for physicists*, Reviews of Modern Physics, Vol. **58** No. **3**, p. 765 (1986). DOI: [10.1103/RevModPhys.58.765](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.58.765)
- [21] ANIRVAN M. SENGUPTA AND PARTHA P. MITRA: *Distributions of singular values for some random matrices*, Physical Review E, Vol. **60** No. **3**, p. 3389 (1999). DOI: [10.1103/PhysRevE.60.3389](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.60.3389)
- [22] VINCENZO TOLA, FABRIZIO LILLO, MAURO GALLEGATI, ROSARIO N. MANTEGNA: *Cluster analysis for portfolio optimization*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. **32** No. **1**, pp. 235-258 (2008). DOI: [10.1016/j.jedc.2007.01.034](https://doi.org/10.1016/j.jedc.2007.01.034)
- [23] MICHELE TUMMINELLO, FABRIZIO LILLO AND ROSARIO N. MANTEGNA: *Hierarchically nested factor model from multivariate data*, EPL (Europhysics Letters), Vol. **78** No. **3**, p. 30006 (2007). DOI: [10.1209/0295-5075/78/30006](https://doi.org/10.1209/0295-5075/78/30006)
- [24] M. TUMMINELLO, T. ASTE, T. DI MATTEO AND R.N. MANTEGNA: *A tool for filtering information in complex systems*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS), Vol. **102** No. **30**, pp. 10421-10426 (2005). DOI: [10.1073/pnas.0500298102](https://doi.org/10.1073/pnas.0500298102)
- [25] MICHEL VERLEYSEN AND DAMIEN FRANÇOIS: *The curse of dimensionality in data mining and time series prediction*, International Work-Conference on Artificial Neural Networks, Springer, pp. 758-770 (2005). DOI: [10.1007/11494669\\_93](https://doi.org/10.1007/11494669_93)





Gera Imre 1997-ben született Orosházán. 2015 óta a Szegedi Tudományegyetem programtervező informatikus hallgatója, ahol 2018-ban alapképzésen szerzett diplomát, azóta mesterképzésen folytatja tanulmányait. Egyetemi évei alatt elsősorban a Számítógépes Optimalizálás Tanszék kutatásaiba kapcsolódott be. Kétszer is indult a Tudományos Diákköri Konferencián, ahol helyi fordulóban egyszer első, egyszer második helyezést ért el, valamint az országos versenyen első, illetve különdíjas lett. 2018 óta az Új Nemzeti Kiválóság Program ösztöndíjasa.

Gera Imre  
Szegedi Tudományegyetem,  
Informatikai Intézet,  
6720 Árpád tér 2.  
gerai@inf.u-szeged.hu



London András 1989-ben született Szegeden. Alkalmazott matematikus MSc diplomát 2012-ben, PhD fokozatot (Informatikai tudományok) 2018-ban szerzett. Jelenleg a Szegedi Tudományegyetem Informatikai Intézet Számítógépes Optimalizálás Tanszékének adjunktusa, illetve részállásban a Poznań-i Közgazdasági Egyetem Operációkutatás Tanszékének adjunktusa. Fő érdeklődési területe a matematikai modellezés, gráf alapú adatbányászat és komplex hálózatok vizsgálata. Referált cikkeinek száma 15, hivatkozási száma több, mint 300.

London András  
Szegedi Tudományegyetem,  
Informatikai Intézet,  
6720 Árpád tér 2.  
london@inf.u-szeged.hu



## GRAPH-BASED DIMENSION REDUCTION HEURISTICS TO STOCK CORRELATION MATRICES

IMRE GERA, ANDRÁS LONDON

Many studies have dealt with the investigation of covariance- and correlation matrices defined by stock price time series over the past few years. Most of these studies highlighted that the estimation of the correlation matrix is associated with a significant amount of statistical uncertainty (or sometimes called noise) and proposed several methods to filter it out. In this survey-kind paper we present different methods found in the literature and propose a novel approach too. Namely, we present a method using the results of random matrix theory, and other methods based on hierarchical clustering procedures. To measure and compare the performance of the methods we utilize the Markowitz portfolio selection problem and perform experiments on the historical stock time series data of the Budapest Stock Exchange. The created portfolios are compared based on several performance indices, realized returns and risk measures. This paper is mainly considered as an overview of papers published [10] and under publishing [8].

*Keywords:* Correlation matrices, asset graphs, portfolio optimization.

*Mathematics Subject Classification* (2000): I.6 [Simulation and Modeling]: Applications; G.1.6 [Optimization]: Nonlinear programming

## LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK KONZISZTENCIÁJÁNAK KOMBINATORIKAI JELENTÉSEI

PLUHÁR ANDRÁS

Régóta ismert a lineáris algebra és a kombinatorika kapcsolata. Itt a Kronecker-Capelli tétel kombinatorikai következményeit járjuk körbe, mely kiadja Kőnig és Harary tételeit és elvezet egyfajta duálisaihoz, valamint a nyaklánc probléma általánosításaihoz és specializációihoz.

### 1. Bevezetés

Nagyon sok mély kombinatorikai állítás bizonyítása lineáris algebrai eszközökkel történik, sokszor nem is ismert más módszer. A terület hatalmas, jelen esetben még a felvázolására sem tehetünk kísérletet, az érdeklődő olvasónak az alábbi kiváló könyveket ajánljuk [2, 10, 11].

A teljesség igénye nélkül megemlíjtük, mely algebrai fogalmak segítenek a jól ismert kombinatorikai állításokban, a részletek a fenti hivatkozásokban megtalálhatóak:

- Fisher egyenlőtlenség ( $r(AA^T) \leq r(A)$ , ahol  $r(A)$  az  $A$  mátrix rangja)
- Páratlan város tétel (független vektorok maximális száma egy  $n$ -dimenziós vektortérben)
- Hoffman-Singleton tétel (főtengely tétel)
- Graham-Pollak tétel ( $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ )
- Feszítőfák száma  $G$  gráfban (Laplace determináns)
- Shannon kapacitás (tenzorszorzat)

A gyakorlatban néha fordított irányban vetődik fel a kérdés, egy adott lineáris algebrai eredménynek mi lehet a kombinatorikai jelentése? Így tehát természetes lehet, van-e nem triviális kombinatorikai következménye a Kronecker-Capelli tételnek, ami a lineáris egyenlőségrendszer megoldhatóságát karakterizálja. Valószínűleg sokan vizsgálták már a problémát, látható nyoma ennek viszont nincs; e sorok írója egyedül Füredi Zoltán publikálatlan eredményéről értesült. Ennek megértéséhez az alábbi fogalmakra lesz szükségünk:

**1.1. Definíció. (Hipergráf)** Egy  $(X, E)$  halmazrendszer, vagy hipergráf az  $X$   $n$  elemű alaphalmaz és részhalmazainak egy  $E$  halmazából áll. Az  $E$  elemei  $e_1, \dots, e_m$ .

**1.2. Definíció. (Színezés)** Az  $(X, E)$  hipergráf egy kettő-színezése alatt egy  $f : X \rightarrow \mathbb{F}_2$  függvényt értünk, ahol  $\mathbb{F}_2$  a kételemű test.<sup>1</sup> Az  $f$  jó színezés, ha  $|f(e) \cap \mathbb{F}_2| = 2$ , azaz mindkét szín előfordul minden  $e \in E$  esetén. Továbbá  $f$  páratlan színezés, ha  $\sum_{x \in e} f(x) = 1$  minden  $e \in E$  esetén.<sup>2</sup>

Vegyük észre, ha  $(X, E)$  hipergráf minden  $e \in E$  éle páros méretű, akkor egy  $f$  páratlan színezés egyben jó színezés is.

**1.1. TÉTEL. (Füredi) [7]** Egy  $(X, E)$  halmazrendszernek akkor és csak akkor van páratlan színezése, ha nincs olyan  $H := \{e_1, \dots, e_{2k+1}\} \subset E$ , hogy bármely  $x \in X$  páros sok  $H$ -beli halmaz eleme.

**1.1. KÖVETKEZMÉNY. (Kőnig)** Egy  $G$  gráfnak akkor és csak akkor van jó kettő-színezése, ha nem tartalmaz páratlan kört.

*Bizonyítás.* Legyen  $X = V(G)$ ,  $E = E(G)$  és alkalmazzuk az 1.1. Tételt az  $(X, E)$  hipergráfra. A fentiek szerint  $G$  gráfnak pontosan akkor van jó kettő-színezése, ha nincs olyan páratlan élhalmaz  $E(G)$ -ben, amelyben minden pont foka páros, azaz egy páratlan séta. Ugyanakkor egy  $G$  gráf pontosan akkor tartalmaz páratlan sétát, ha páratlan kört is.  $\square$

A következő fejezetben bebizonyítjuk Füredi tételének általánosítását és néhány további következményét.

## 2. általánosított Füredi tétel és következményei

Mint említettük, szükségünk lesz a Kronecker-Capelli tételre:

**2.1. TÉTEL. (Kronecker-Capelli)** Legyen  $\mathbb{F}$  egy tetszőleges test,  $A$  egy  $m \times n$ -es mátrix, míg  $b$  egy  $m$ -dimenziós vektor  $\mathbb{F}$  felett. Az  $Ax = b$  egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha nincs olyan  $y \in \mathbb{F}^m$ , amelyre  $y^T A = \mathbf{0}$ , de  $y^T b = 1$ .

Mielőtt kimondanánk és bizonyítanánk az 1.1. Tétel általánosítását, Harary stabilitási fogalmát vesszük át hipergráfokra:

<sup>1</sup>Bármely kételemű halmazba képezhetne  $f$ , viszont az algebrai struktúra nagyon hasznos az  $\mathbb{F}_2$ -ben.

<sup>2</sup>Azaz minden  $e$  élben páratlan sok pont kapja az egyes színt.

**2.1. Definíció.** (*Stabil színezés*) Legyen  $(X, E, \phi)$  egy élszínezett hipergráf, ahol  $\phi : E \rightarrow \mathbb{F}_2$ . Az  $(X, E)$  hipergráf stabil színezése olyan  $f : X \rightarrow \mathbb{F}_2$  függvény, amelyre  $\sum_{x \in e} f(x) = \phi(e)$  minden  $e \in E$  esetén.

**2.2. TÉTEL.** (általánosított Füredi) Egy  $(X, E, \phi)$  hipergráfnak akkor és csak akkor van stabil színezése, ha nincs olyan  $H := \{e_1, \dots, e_k\} \subset E$ , hogy bármely  $x \in X$  páros sok  $H$ -beli halmaz eleme és a  $H$  halmaz páratlan sok elemét színezi a  $\phi$  egyessel.

*Bizonyítás.* Vegyük fel az  $(X, E, \phi)$  hipergráf illeszkedési mátrixának transzponáltját, azaz az  $A$  mátrix sorai  $E$ , az oszlopai pedig  $X$  elemeihez tartoznak és  $A_{ex} = 1$ , ha  $x \in e$ , különben  $A_{ex} = 0$ . Legyen továbbá az  $m$ -dimenziós  $b$  vektor  $i$ -edik koordinátája,  $b_i := \phi(e_i)$ . Ekkor az  $Ax = b$  egy megoldása a kételemű  $\mathbb{F}_2$  test felett éppen az  $(X, E, \phi)$  hipergráf egy stabil színezését adja. Ha nincs stabil színezés, a 2.1. Tétel szerint van olyan  $y \in \mathbb{F}_2^m$ , amivel  $y^T A = \mathbf{0}$ , és  $y^T b = 1$ . Vegyük azon  $e_i$  éleket, melyekre  $y_i = 1$ . Az ezek által lefedett pontok páros sokszor vannak fedve az  $y^T A = 0$  miatt, ugyanakkor páratlan sok él színe 1 az  $y^T b = 1$  miatt.  $\square$

A 2.2. Tétel Harary 1954-ben közölt eredményének hipergráfokra vett általánosítása. Harary tétele maga is egy általánosítás, mégpedig a König Dénestől származó 1.1. Tételé. A motivációja a szociológiából származott, mint a gráfelmélet sok más problémája. Az egyszerű  $G$  gráf pontjai entitások, a köztük lévő kapcsolatot mint élt címkézte  $+$ ,  $-$  jelekkel, amelyek barátságos vagy ellenséges viszonyra utaltak. Stabilitás akkor várható, ha két csoportra osztható a ponthalmaz úgy, hogy a csoportokon belül csak  $+$ , köztük pedig csak  $-$  élek vannak. A 2.2. Tételből az 1.1. Következmény bizonyításához teljesen hasonló módon kapjuk Harary eredeti tételét:

**2.1. KÖVETKEZMÉNY.** (Harary) [8] Egy címkézett  $G$  gráfnak akkor és csak akkor van stabil felosztása, ha minden körében páros sok negatív él van.

**2.1. Megjegyzés.** A fent vázolt megközelítésnek algoritmikus jelentése is van. Az  $Ax = b$  megoldásával, azaz pl. egy Gauss-elimináció végrehajtásával eldönthető, hogy egy  $G$  gráf páros (vagy előjelezett esetben stabil). Továbbá a pozitív válasz esetén kiolvasható egy színosztályokra bontása is.

## 2.1. Duális König és Harary tétel

Az algebrai megközelítés miatt értelmezhetjük a 2.2. és így az 1.1. és 2.1. Tételek duálisait. Formálisan felcseréljük az  $X$  és  $E$  szerepét és  $A$  helyett az  $A^T$  mátrixot vesszük, ami éppen az  $(X, E)$  hipergráf illeszkedési mátrixa.

Tegyük fel, hogy  $(X, E, \alpha)$  színezett hipergráfban az  $\alpha : X \rightarrow \mathbb{F}_2$  a pontok rögzített színezése, és egy  $h$  stabil élszínezés olyan  $h : E \rightarrow \mathbb{F}_2$ , amelyre  $\sum_{x \in e} h(e) = \alpha(x)$  minden  $x \in X$  esetén. Ekkor a 2.2. Tétel átmegy a következőbe:

**2.1.1. TÉTEL.** (Duális Füredi) *Egy  $(X, E, \alpha)$  hipergráfnak akkor és csak akkor van stabil élszínezése, ha nincs olyan  $Y := \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ , hogy bármely  $e \in E$  páros sok  $Y$ -beli elemet tartalmaz és az  $Y$  halmaz páratlan sok elemét színezi az  $\alpha$  egyessel.*

Speciálisan: címkézzük egy  $G$  gráf pontjait  $+$  és  $-$  címkével. Stabil élfelbontás alatt olyan  $E(G) = E_1 \cup E_2$  felbontást értünk, amelyre minden  $+$ -szal címkézett pontra páros sok, míg minden  $-$ -szal címkézett pontra páratlan sok  $E_1$ -beli él illeszkedik.

**2.1.1. KÖVETKEZMÉNY.** (Duális Harary) *Egy pontcímkézett  $G$  gráfnak akkor és csak akkor van stabil élfelbontása, ha nincs olyan komponense, amelyik páratlan sok negatív címkéjű pontot tartalmaz.*

**2.1.2. KÖVETKEZMÉNY.** (Duális König) *Egy  $G$  gráf  $E(G)$  élhalmaza felbontható  $E_1, E_2$  részre úgy, hogy minden pontra páratlan sok  $E_1$ -beli él illeszkedjen akkor és csak akkor, ha  $G$ -nek nincs páratlan komponense.*

### 3. Egyéb egyenletek

Az  $Ax = b$  egyenletrendszer megoldásainak szerkezete messzire vezet, amit éppen csak érintünk ebben az írásban.

Az ún. *nyaklánc problémát* Alon és West vizsgálta 1987-ben, lásd [1]. Az eredeti változatban két tolvaj akar osztozkodni egy nyaklánc kövein. A láncon  $n$  fajta kő van, és minden fajtból páros sok. Minimálisan hány helyen kell elvágni a láncot, ha egyenlő számút akarnak kapni minden fajta kőből? Könnyű látni, hogy az  $1122 \dots nn$  esetén legalább  $n$  vágás kell. Alon és West belátta,  $n$  vágás mindig elég. Ők egy klasszikus topológiai eredményt, a Borsuk-Ulam tételt használták.

**3.1. TÉTEL.** (Borsuk-Ulam) *Tegyük fel, hogy  $f$  egy folytonos függvény, amely az  $n + 1$ -dimenziós gömb felszínét, jele  $\mathbb{S}^n$ , az  $\mathbb{R}^n$ -be képezi. Ekkor van olyan  $x \in \mathbb{S}^n$ , melyre  $f(x) = -f(-x)$ .*

Pontosabban ennek egy ekvivalens formáját használják, amelyben feltétel, hogy  $f(x) = -f(-x)$ . Ekkor van olyan  $x \in \mathbb{S}^n$ , melyre  $f(x) = \mathbf{0}$ .

Vegyük észre, ha  $f$  egy  $\mathbb{R}^{n+1}$ -ből  $\mathbb{R}^n$ -be képző lineáris függvény, melynek mátrixa az  $n \times (n + 1)$ -dimenziós  $A$ , akkor speciálisan azt kapjuk, hogy az  $Ax = \mathbf{0}$  elfajuló homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása. Ennek a segítségével bizonyította a színezési tételét Seymour [13], ill. ez a kiinduló pontja a Beck-Fiala tételnek is [4].

Epping és társai a nyaklánc probléma algoritmikus megoldhatóságát, illetve a vágások minimalizálását is vizsgálták, lásd [6]. Kitűnő összefoglalót írt erről Meunier és Neveu, lásd [12].

Néhány eredmény ezekből:

1. Ha  $n$  típusú kő van, akkor polinom időben található  $n$  megfelelő vágás.
2. A minimális vágás megtalálása NP-nehéz.
3. A mohó algoritmus  $n$  vágással megoldja az elosztást, ha minden fajta kőből pontosan két darab van, ez az ún. *Festőműhely* (Paint shop) probléma.
4. A minimális vágás megtalálása NP-nehéz a Festőműhely problémában is.

A Festőműhely problémát, illetve a 3. pont eredményét lineáris egyenletrendszerrel is megfogalmazhatjuk, ill. megoldhatjuk. Végighaladva a láncan rendeljük az  $x_i$  változót az  $i$ -edik és  $i + 1$ -edik kő között lévő darabhoz. Az  $x_i$  változók 0, 1 értékeket vehetnek fel, az 1-et a lánc elvágásának tekintjük. Az elosztás jó, ha bármely két azonos típusú kő között páratlan sok vágás van, ekkor kerül a két kő különböző játékoshoz. Jelölje  $A$  a következő mátrixot. A sorai a kövekhez tartoznak, és ha  $j$ -edik típusú kövek az  $s_j < s'_j$  pozícióban vannak, akkor az  $A_{ji} = 0$ , ha  $i < s_j$  vagy  $s'_j < i$ , különben  $A_{ji} = 1$ . Könnyen látható, hogy  $Ax = \mathbf{1}$  egy megoldása az  $\mathbb{F}_2$  test felett a Festőműhely probléma egy jó vágását kódolja. Elegendően sok vágással mindig van megoldás, így ha egy bázismegoldást használunk,  $n$  vágás biztosan elég, azaz újra bizonyítottuk a következő állítást:

**3.1. ÁLLÍTÁS.** [6] *Ha a Festőműhely problémában minden kőből (színből) pontosan kettő van, és  $n$  fajta kő van összesen, akkor  $n$  vágás elegendő.*

A fenti eljárás többféleképpen általánosítható.

### 3.1. Intervallumok, klikkek lefogása

Klasszikus probléma egy  $\mathbf{I} = \{I_i\}_{i=1}^n$  intervallumrendszer lefogó pontthalmazainak vizsgálata, azaz olyan  $X \subset \mathbb{R}$  halmazé, melyre  $X \cap I_i \neq \emptyset$   $i = 1, \dots, n$  esetén. Mindig van ilyen, illetve a minimális méretű  $X$  halmaz megtalálása mohó algoritmussal történhet, lásd [5]. Mi történik, ha erősebb feltételünk van a fedésre,  $|X \cap I_i|$  páratlan minden  $i$ -re? Nevezzük ezt *páratlan fedésnek*.

Ekkor persze nem mindig van megoldás, pl.  $\mathbf{I} = \{[0, 2], [0, 1], (1, 2]\}$ . A megoldhatóságot az alábbi algebrai konstrukcióval modellezhetjük. Rendeljük az  $\mathbf{I}$  rendszerhez azt az  $A$ ,  $n$  sorból álló 0 – 1 mátrixot, melynek soraiban az 1-ek sorfolytonosan követik egymást, és  $A_{ji} \leq A_{ki}$ , ha  $I_j \subset I_k$  úgy, hogy a  $k$ -adik sorban balról (jobbról) több 1-es van, ha  $I_j$  bal (jobb) végpontja nagyobb (kisebb) mint  $I_k$  bal (jobb) végpontja.

**3.1.1. ÁLLÍTÁS.** (Fedhetőség) *Az  $\mathbf{I}$  rendszernek akkor és csak akkor van páratlan fedése, ha az  $Ax = \mathbf{1}$  rendszer megoldható  $\mathbb{F}_2$  testben.*

*Bizonyítás.* Nyilvánvaló a konstrukcióból. □

**3.1.1. KÖVETKEZMÉNY.** (Fedhetetlenség) *Ha az  $\mathbf{I}$  rendszernek nincs páratlan fedése akkor, van olyan  $\mathbf{I}^* \subset \mathbf{I}$  részrendszere, hogy  $|\mathbf{I}^*|$  páratlan és minden  $x \in \cup \mathbf{I}^*$  pont páros sok  $\mathbf{I}^*$ -beli intervallumban van.*

*Bizonyítás.* Használjuk a 2.1. Tételt az  $\mathbf{I}$ -hez rendelt  $A$  mátrixszal az  $Ax = \mathbf{1}$  megoldhatóságára az  $\mathbb{F}_2$  testben.  $\square$

A fenti gondolatmenet átvihető gráfok klikkjeinek fedésére is. Első lépésben jegyezzük meg, hogy az intervallumgráfok klikk-pont illeszkedési mátrixa sorfolytonos, lásd [9], továbbá a klikkek száma nem több, mint a pontoké. Másrészt intervallumgráf klikkjeinek bármely rendszerében van legbaloldalibb klikk, így 3.1.1. Következmény szerint, ha  $G$  intervallumgráf, akkor a klikkjei páratlanul fedhetők legfeljebb  $v(G)$  ponttal.

Általában is vizsgálhatók gráfok páros klikkfedései. A 3.1.1. Következmény mindig használható, csak a klikkek száma lehet exponenciális a pontszámban, illetve a szerkezetük jóval bonyolultabb.

### 3.2. Fák kettévágása

Egy másik lehetőség a nyaklánc probléma általánosítására, ha egy út helyett egy fára fűzzük fel a köveket. Ha minden kőtípusból (vagy színből más szóhasználat szerint) páros sok van, akkor elegendő él elvágásával pontosan kettévághatjuk őket. érdekes módon ez a kérdés már jóval a nyaklánc probléma előtt felvetődött, lásd Bhatt és Leiserson [3]. Ők, többek között, az alábbi tételt mutatták meg:

**3.2.1. TÉTEL.** (Bisector) [3] *Minden bináris fákból álló, két színnel színezett  $n$  pontú  $F$  erdő pontosan kettévágható legfeljebb  $2 \log_2 n$  él elvágásával.*

Megmutatjuk, ha minden fajta kőből két darab van, a 3.1. Állítással analóg tétel áll.

**3.2.2. TÉTEL.** (2-kő) *Ha  $F$  egy  $n$  színnel színezett fa, ahol minden szín pontosan kétszer fordul elő, akkor legfeljebb  $n$  él elvágásával kettévágható  $F$ .*

*Bizonyítás.* Legyen  $A$  az út-él illeszkedési mátrixa  $F$  fának, ahol az utak az azonos színű köveket kötik össze, azaz egy  $n \times (2n - 1)$ -es mátrixról van szó. Az  $Ax = b$  megoldható  $\mathbb{F}_2$  felett, hiszen könnyen látható, nincs különböző utak olyan nem triviális részhalmaza, mely páros sokszor fed minden élt, így használhatjuk a 2.1. Tételt. Másrészt ha van megoldás, akkor van bázismegoldás is, amelyben legfeljebb  $n$  nem zéró változó van.  $\square$

Felvetődik a kérdés, van-e a nyaklánc tételnek közvetlen általánosítása? (Azaz  $n$  kő esetén  $cn$  valamely  $c$  konstansra, akár  $c = 1$ -re.) Sajnos már egyfajta kő (szín) esetén nagyon sok vágásra lehet szükség, például a  $K_{2k-1,1}$  csillag  $k$  vágást igényel. Az  $F$  fa foksámának a korlátozása sem elég a  $cn$  korláthoz, hisz az egyszínű bináris fánál is  $\log_2 v(F)$  vágásra van szükség (Csaba Béla észrevétele).

3.2.1. SEJTÉS. (általános kettévágás) *Ha  $F$  egy  $n$ -színezett fa, ahol minden színből páros sok van, akkor  $F$ -nek van olyan kettévágása, amely csak  $cdn \log_2 v(F)$  élt vág el, ahol  $d$  a maximális fokszám,  $c$  pedig egy abszolút konstans,  $v(F)$  a fa csúcsainak száma.*

### Köszönetnyilvánítás

Jelen kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal az SNN-117879 sz. pályázatával támogatta. Köszönöm a bírálók figyelmes munkáját, amivel rengeteget javítottak a dolgozat minőségén.

### Hivatkozások

- [1] ALON, N. AND B. WEST D. B.: *The Borsuk-Ulam theorem and bisection of necklaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. **98** No. **4**, pp. 623-628 (1986). DOI: [10.1090/S0002-9939-1986-0861764-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1986-0861764-9)
- [2] BABAI, L. AND FRANKL, P.: *Linear Algebra Methods in Combinatorics: With Applications to Geometry and Computer Science*, Department of Computer Science, Univ. of Chicago, (1992).
- [3] BHATT, S. N. AND LEISERSON C. E.: *How to assemble tree machines*, Proceedings of the fourteenth annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM (1982). DOI: [10.1145/800070.802179](https://doi.org/10.1145/800070.802179)
- [4] BECK, J. AND FIALA, T.: *Integer-making theorems*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **3** No. **1**, pp. 1-8 (1981). DOI: [10.1016/0166-218X\(81\)90022-6](https://doi.org/10.1016/0166-218X(81)90022-6)
- [5] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., & STEIN, C.: *Új algoritmusok*, Sclolar Kiadó, Budapest (2003).
- [6] EPPING, TH, HOCHSTÄTTLER W. AND PETER OERTEL P.: *Complexity results on a paint shop problem*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **136** No. **2-3**, pp. 217-226 (2004). DOI: [10.1016/S0166-218X\(03\)00442-6](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(03)00442-6)
- [7] FÜREDI, Z.: szóbeli közlés
- [8] HARARY, F.: *On the notion of balance of a signed graph*, The Michigan Mathematical Journal, Vol. **2** No. **2**, pp. 143-146 (1953). DOI: [10.1307/mmj/1028989917](https://doi.org/10.1307/mmj/1028989917)
- [9] GOLUMBIC, M. C. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, Elsevier, Vol. **57**, (2004). DOI: [10.1002/net.3230130214](https://doi.org/10.1002/net.3230130214)
- [10] GUTH, L.: *Polynomial methods in combinatorics*, American Mathematical Soc., Vol. **64**, (2016). DOI: [10.1090//ulect/064](https://doi.org/10.1090//ulect/064)



- [11] MATOUŠEK, J.: *Thirty-three miniatures: Mathematical and Algorithmic applications of Linear Algebra*, Providence, RI: American Mathematical Society, (2010). DOI: [10.1090/stml/053](https://doi.org/10.1090/stml/053)
- [12] MEUNIER, F. AND NEVEU, B.: *Computing solutions of the paintshop-necklace problem*: Computers & Operations Research, Vol. **39** No. 11, pp. 2666-2678 (2012). DOI: [10.1016/j.cor.2012.01.014](https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.01.014)
- [13] SEYMOUR, P. D.: *On the two-colouring of hypergraphs*, Quart. J. Math. Oxford Ser., Vol. **2** No. **25**, pp. 303-312 (1974). DOI: [10.1093/qmath/25.1.303](https://doi.org/10.1093/qmath/25.1.303)



Pluhár András 1963-ban született Gyulán, alapfokú tanulmányait Eleken, míg a középiskolait Gyulán végezte. 1982-ben fizikus szakra járt egy évig a JATE-n, majd Modellalkotó matematikus szakra jelentkezett át és szerzett diplomát 1988-ban. 1988-93 között az MTA szegedi kutatócsoportjában volt alkalmazásban, 1990-ben ösztöndíjat nyert a Rutgers egyetemre. Itt 1994-ben PhD fokozatot szerzett Beck József témavezetésével. 1993-ban átkerült a JATE (később Szegedi Tudományegyetem) Informatika intézetébe, ahol a mai napig dolgozik. Fő érdeklődési területe, gráfok, kombinatorikus játékok, gráfalapú adatbányászat. Kb. 50 megjelent publikációja van, négy doktori diák szerzett PhD fokozatot a vezetésével.

Pluhár András  
Szegedi Tudományegyetem,  
Informatikai Intézet,  
Számítógépes Optimalizálás Tanszék  
pluhar@inf.u-szeged.hu

## THE COMBINATORIAL MEANING OF THE CONSISTENCY OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

ANDRÁS PLUHÁR

The connection between Linear Algebra and Combinatorics is well-known. Here we explore the combinatorial meaning of the Kronecker-Capelli theorem, which provides the celebrated theorems of König and Harary and leads us to the duals of those as well as the generalizations and special cases of the Necklace problem.

*Keywords:* Linear Algebra method, König theorem, Necklace problem

*Mathematics Subject Classification* (2000): 15A06, 05C15, 05C35

*Alkalmazott Matematikai Lapok* (2020)

## CSŐDSZABÁLYOK PÉNZÜGYI HÁLÓZATOKBAN

CSÓKA PÉTER, KONDOR GÁBOR

A leggyakrabban rendszerkockázat mérésére és kezelésére alkalmazott pénzügyi hálózatokban mindenkinek van egy induló pénzkészlete és minden szereplő tartozhat mindenkinek. Csődszabályok mondják meg, hogy ki hogyan rendezze tartozásait. Az azonos kielégítési szinten lévő feleket legtöbbször követeléseikkel arányosan fizetik ki a csődszabályok, de vannak bonyolultabb konstrukciók is. Mivel a fizetések egymástól függenek, általános esetben fixpontok adják a probléma megoldását. A tanulmányban áttekintjük a csődszabályok szakirodalmát, a legfontosabb definíciókat és eredményeket.

### 1. Bevezetés

Az elmúlt két évtized során egyre nagyobb figyelmet kaptak a különböző pénzügyi hálózatok, és ezzel együtt a pénzügyi intézmények egyre fokozódó összekapcsoltságából fakadó rendszerkockázat. A rendkívül összetett pénzügyi hálózatokban ugyanis a gyakorlati szakembereknek már nemcsak az intézmények egyedi csődjeivel kellett szembenéznük, hanem a csődök fertőzésszerű továbbterjedésével is.

A gyakorlatban felmerült probléma az elméleti szakemberek érdeklődését is felkeltette, és a kezdeti, főként egy szereplő vagyonának elosztásáról szóló csődproblémáról a többszereplős pénzügyi hálózatok vizsgálatára került át a hangsúly, ahol a csődszabályok mondják meg, hogy ki mennyit fizessen.

A pénzügyi hálózatok elemzése során természetes módon adódott, hogy a kutatók a klasszikus csődproblémák eredményeit megkísérelték kiterjeszteni a komplexebb pénzügyi hálózatokra. Emellett számos kapcsolódó tanulmány foglalkozott magával a pénzügyi hálózat felépítésével és időbeli alakulásával, a rendszerkockázat és a pénzügyi hálózat kapcsolatával, valamint a rendszerkockázat mérésével.

Tanulmányunkban a 2. fejezetben ismertetjük a legfontosabb cikkeket a csődprobléma témaköréből, és kitekintést adunk a kapcsolódó területekre is. A 3. fejezetben definiáljuk az alapfogalmakat különböző csődszabályok bevezetésén és példákon keresztül, továbbá bemutatunk néhány fontos eredményt. A 4. fejezetben összegyűjtjük.

## 2. Irodalomáttekintés

Egy férfi fiaira hagyja vagyonát, azonban a követelések összege nagyobb, mint a teljes vagyon értéke. A kérdés az, hogy melyik fiú mekkora részt kapjon az örökségből. Ezzel a problémafelvetéssel foglalkozik O'Neill [18] cikkében, amely analóg az egy pénzügyi szereplő csődje esetén fennálló vagyoneelosztási feladattal. Erre a tanulmányra, amely különböző elosztási szabályokat hasonlít össze a vagyon elosztására, a csődproblémák elemzésének kiindulópontjaként tekintenek a szakirodalomban.

A csődproblémákat később kiterjesztették pénzügyi hálózatokra is, amelyekben több szereplő együttes csődje miatt egy sokkal összetettebb problémát kell megoldani. Itt mindenkinek van egy induló pénzkészlete és minden szereplő tartozhat mindenkinek. Pénzügyi hálózatok esetén elosztási szabály helyett csődszabálynak hívjuk azt a függvényt, amely megmondja, hogy ki hogyan rendezze tartozásait, ki mennyit fizessen, vagyis mi legyen a klíringmátrix.

A gyakorlatban legelterjedtebb arányos csődszabályt Eisenberg és Noe [6] definiálja, és a szerzőpáros belátja, hogy bizonyos feltételek esetén mindig létezik klíringmátrix, amely egyértelmű. Az arányos csődszabályt pénzügyi hálózatokban először Csóka és Herings [4] axiomatizálja hat tulajdonság segítségével (magyarul lásd Csóka [3]). A két fő, központi axióma a pártatlanság (impartiality) és az azonos ágensek általi manipulálhatatlanság (non-manipulability by identical agents). A további axiómák a követelések felsőkorlát-jellege (claims boundedness), a korlátolt felelősség (limited liability), a hitelezők elsőbbsége (priority of creditors) és végül a folytonosság (continuity). A szerzők belátják, hogy az axiómák függetlenek, és ezt a hat axiómát csak az arányos csődszabály teljesíti. Az axiómákból három lényegében már az Eisenberg és Noe [6] cikkben is megjelenik: a követelések felsőkorlát-jellege, a korlátolt felelősség és a hitelezők elsőbbsége. Ennek a három axiómának a csődbemenő ágensek legkisebb halmazára gyakorolt hatását vizsgálja Houy, Jouneau és Le Grand [14].

Szintén csődszabályokat vizsgál Groote Schaarsberg, Reijnierse és Borm [12], és belátják, hogy habár a fizetések meghatározása általánosságban nem egyértelmű, az eredményül kapott saját tőke értékek (a végső egyenlegek) igen. Ugyanakkor igazolják, hogy a csődproblémák egy alosztályára (hierarchical mutual liability problems) a fizetések meghatározása is egyértelmű. Továbbá megadják a Talmud szabályon alapuló csődszabály egy karakterizációját. Ide tartozik Koster [16] munkája is, amelyben a szerző megmutatja, hogy általános pénzügyi hálózatokban csak akkor létezik egyértelmű klíringmátrix, ha a csődszabály szigorúan monoton. A csődszabályok kapcsán végül megemlítjük Flores-Szwagrzak, García-Segarra és Ginés-Vilar [10] tanulmányát, amelyben olyan elosztási szabályokat karakterizálnak, amelyek bizonyos hitelezői csoportokat előnyben részesítenek a fizetéseknél.

Az egymással valamilyen szempontból versengő pénzügyi szereplők megléte a játékelméleti megközelítéseket is inspirálta. Pálvölgyi, Peters és Vermeulen [19] a csődjáték egy új nemkooperatív játékelméleti értelmezését elemzi, és a Nash egyen-

súly létezését és meghatározását vizsgálja az adódó játékokban. Stutzer [22] megpróbálja kiterjeszteni pénzügyi hálózatokra a csődproblémáknál már két klasszikus elosztási szabály igazolására is alkalmazott Nash alkuelméletet (Nash Bargaining theory), és ellenpéldákkal megmutatja, hogy általános esetben nem azokat az elosztási szabályokon alapuló csődszabályokat kapjuk.

A véletlent is tartalmazó tanulmányok közül elsőként Tasnádi [24] munkáját emeljük ki, aki a klasszikus és a probabilisztikus elosztási problémák között terem kapcsolatot. Pontosabban minden klasszikus elosztási problémához hozzárendel egy minimális varianciájú probabilisztikus elosztási eljárást, amely ugyanarra a várható eloszlásra vezet, mint a klasszikus elosztási módszer. Másodsorban Balog, Bátyi, Csóka, és Pintér [1] tanulmányáról ejtünk szót, akik összefoglalják a sztochasztikusan stabil pénzügyi hálózatokhoz kapcsolódó, általuk legfontosabbnak tartott pénzügyi alkalmazásokat és új modellváltozatokat. Tanulmányukban többek között a rendszerkockázatra és a fertőzések helyezik a hangsúlyt. Emelítést érdemel még továbbá Habis [13] munkája, amely megközelítésében ötvözi mind a játékelméletet, mind a véletlent. A szerző a kooperatív játékelméletből ismert mag egy kiterjesztésével, a gyenge szekvenciális mag segítségével olyan csődhelyzeteket elemez, ahol a felosztandó vagyon értéke és a követelések összege is bizonytalan lehet. Továbbá megvizsgálja, hogy a különböző elosztási szabályok stabil, fenntartható eredményre vezetnek-e egy ilyen környezetben.

A pénzügyi hálózatokkal rendszerkockázati szempontból foglalkozik Lublőy [17], aki a magyar bankközi piacon keresztüli fertőzés kvantitatív mérését végezte el. Elsinger, Lehar és Summer [8] cikkükben Eisenberg és Noe [6] modelljére építve a bankrendszer egészének kockázatát vizsgálják. Az Osztrák bankrendszer adataira alkalmazzák modelljüket, és azt találják, hogy a bankok eszközportfóliói között lévő korreláció a rendszerkockázat legfőbb forrása. Berlinger, Michaletzky és Szenes [2] a magyar fedezetlen bankközi forintpiac hálózatának időbeli alakulását vizsgálta 2002 decemberétől 2009 márciusáig, részletesen elemzik a piac jellemzőit és az egyes szereplők viselkedését. Végül Jackson és Pernoud [15] a rendszerkockázathoz kapcsolódó pénzügyi hálózatok kulcsfontosságú trendjeit és tulajdonságait mutatja be. Egy új hálózati modellt is adnak, amellyel az egymástól való függést modellezik, és a pénzügyi intézmények ösztönzőit vizsgálják a portfóliók kockázatának és a partnereik megválasztása során.

A központosítás szerepével foglalkozik Csóka és Herings [5], akik tanulmányukban bevezetik a decentralizált klíringfolyamatok egy nagy osztályát. Bemutatják, hogy minden ilyen folyamat véges sok lépésben a legkisebb klíringmátrixhoz konvergál. Amikor az elszámolási egység elegendően kicsi, akkor minden decentralizált klíringfolyamat révén közel ugyanazt a saját tőke értéket kapjuk, mint egy centralizált eljárással. Garratt és Zimmerman [11] pedig azt vizsgálja, hogy a pénzügyi hálózatokban milyen hatása van a központi nettósítás bevezetésének a partnerek teljes nettó kitettségére, és megmutatják, hogy ez nem minden esetben előnyös, mert növelheti a varianciát.

Feinstein, Pang, Rudloff, Schaanning, Sturm és Wildman [9] új aspektusból vizsgálják az arányos csődszabálynál kapott klíringvektort. A szerzők azt elemzik, hogy az mennyire érzékeny a pénzügyi rendszer bilaterális követelések becslési hibáira. A módszertiket európai bankok adatain is alkalmazzák, és azt találják, hogy a zaj a kötelezettségek relatív mértékében a fertőzés kockázatának alulbecslését eredményezheti.

Végül Schuldenzucker, Seuken és Battiston [21] eredményére térünk ki, amelyben a pénzügyi hálózatokat tanulmányozva egy újfajta rendszerkockázatra hívják fel a figyelmet a szerzők. Ez abból az általuk csődbizonytalanságnak (default ambiguity) nevezett szituációból ered, amikor nem lehet eldönteni, hogy mely bankok mennek csődbe. Belátják, hogy ha a bankok CDS-eket (Credit Default Swap) is tarthatnak, akkor a klíringmátrixnak lehet, hogy nincs megoldása, vagy éppen több, egymásnak ellentmondó megoldása van.

### 3. Jelölések, pénzügyi hálózatok

A legfontosabb jelölések és definíciók bevezetésénél Csóka [3] cikkére támaszkodunk. Egy pénzügyi hálózatot a szereplők vagy más néven az ágensek halmaza, az ágensek induló készletének értéke, valamint az ágensek többi ágenssel szembeni tartozásainak mértéke határoz meg. Ezeket rendre az alábbiak szerint definiáljuk.

Az ágensek halmazát jelölje  $N$ , amely a lehetséges ágensek halmazának,  $N$ -nek egy részhalmaza, formálisan  $N \in \mathcal{N}$ , ahol  $\mathcal{N}$  az  $\mathbb{N}$  nem üres, véges részhalmazainak halmazát jelöli.

Az ágensek *induló készletét* (*endowments*) a  $z \in \mathbb{R}_{++}^N$  vektor adja meg, ahol  $z_i$  magában foglalja az  $i$ -edik ágens minden eszközét, kivéve a többi ágensre vonatkozó követeléseket.

Végül az ágensek tartozásai az  $L \in \mathbb{R}_{+}^{N \times N}$  *tartozási mátrix* (*liability matrix*) által adottak, amelyben az  $L_{ij}$  elem azt mutatja meg, hogy mekkora az  $i$ -edik ágens tartozása a  $j$ -edik felé. Az ágensek definíció szerint nem tartozhatnak önmaguknak, így a tartozási mátrix főátlójában nullák szerepelnek, tehát  $L_{ii} = 0$ , valamint két ágens kölcsönösen tartozhat egymásnak, vagyis  $L_{ij} > 0$  és  $L_{ji} > 0$  együttes fennállása megengedett.

Ekkor a pénzügyi hálózat az  $(N, z, L)$  hármas által adott, az összes pénzügyi hálózat halmazát pedig jelölje  $\mathcal{F}$ . Azt, hogy adott pénzügyi hálózatban a felmerülő csőd esetén az ágensek mennyit fizetnek egymásnak a  $P \in \mathcal{M}(N)$  *fizetési mátrix* (*payment matrix*) határozza meg, ahol  $\mathcal{M}(N)$  jelöli a főátlójukban nullákat, egyébként nem negatív valós számokat tartalmazó négyzetes mátrixok halmazát. A  $P$  fizetési mátrix és  $i \in N$  ágens esetén jelölje  $P_i \in \mathbb{R}^N$  a  $P$  mátrix  $i$ -edik sorát. Ekkor  $P_{ij}$  adja meg az  $i \in N$  ágens által a  $j \in N$  ágensnek fizetett összeget.

Az  $\mathcal{M}(N)$ -en értelmezett parciális rendezés,  $\leq$  a szokásos módon definiált. Tetszőleges  $P, P' \in \mathcal{M}(N)$  mátrixra  $P \leq P'$  pontosan akkor, ha  $P_{ij} \leq P'_{ij}$  minden

$(i, j) \in N \times N$ -re. Az  $\mathcal{M}(N)$ -beli mátrixok összes véges ágenshalmaz esetén vett uniója legyen  $\mathcal{M} = \cup_{N \in \mathcal{N}} \mathcal{M}(N)$ .

Az  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$  pénzügyi hálózat és a  $P \in \mathcal{M}(N)$  fizetési mátrix esetén az  $i \in N$  ágens *eszközeinek értéke* (*asset value*) legyen

$$a_i(N, z, P) = z_i + \sum_{j \in N} P_{ji},$$

amely az induló készlet és a másoktól kapott kifizetések összege. Az eszközök értékéből kivonva az ágens által fizetett összeget, megkapjuk az ágens *saját tőkéjét* (*equity*), amely az  $i \in N$  ágens esetén legyen

$$e_i(N, z, P) = a_i(N, z, P) - \sum_{j \in N} P_{ij} = z_i + \sum_{j \in N} (P_{ji} - P_{ij}).$$

A saját tőkéek összege az összes ágensre megegyezik az induló készletek összegével, így a csődöt követő fizetések csupán átrendezik az összvagyon szereplők közötti eloszlását.

A csődszabályok egy  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$  pénzügyi hálózathoz egy  $P \in \mathcal{M}(N)$  fizetési mátrixot rendelnek. Gyakorlatilag azt adják meg, hogy az egyes ágensek mekkora összeget fizessenek a többi ágensnek.

**3.1. Definíció.** A *csődszabály* egy olyan  $b : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$  függvény, amelynél minden  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ -re  $b(N, z, L) \in \mathcal{M}(N)$ .

A pénzügyi hálózatok elemzése azért bonyolult és érdekes, mert körbetartozások lehetnek, és a csőd fertőzéssel terjedhet. Sokkal egyszerűbb a sokat elemzett elosztási problémák családja. Az elosztási problémákban egy  $E \in \mathbb{R}_+$  nagyságú vagyont kell felosztani az  $N \in \mathcal{N}$  halmazban lévő hitelezők között, akiknek a követelésvektora  $c \in \mathbb{R}_+^N$ . Elosztási problémák esetén elosztási szabályokat határozzunk meg.

Egy *elosztási szabály* (*division rule*) egy  $d : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+^N$  függvény, amelyre minden  $j \in N$ -re  $d_j(E, c) \leq c_j$  és  $\sum_{j \in N} d_j(E, c) = \min\{E, \sum_{k \in N} c_k\}$  teljesül, továbbá minden  $j \in N$ -re  $d_j$  gyengén növekvő  $E$ -ben. Ez rendre annak felel meg, hogy minden ágens legfeljebb a követelése mértékéig részesülhet a vagyonból, továbbá az eredményül kapott részek összege nem haladhatja meg sem a vagyon nagyságát, sem a követelések összegét, és végül, ha nő a szétosztandó vagyon mértéke, akkor a változás után mindenki legalább akkora részt kap, mint amennyit a változás előtt kapott volna. Ezen tulajdonságokból következik, hogy  $d$  folytonos (lásd Thomson [25]). Napjainkban talán a legszélesebb körben alkalmazott ilyen szabály az arányos elosztási szabály.

A  $d^a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+^N$  *arányos elosztási szabály* (*proportional rule*) a  $j \in N$  hitelezőhöz a  $d_j^a(E, c)$  összeget rendeli, ahol

$$d_j^a(E, c) = \begin{cases} 0, & \text{ha } c_j = 0, \\ \min \left\{ \frac{c_j}{\sum_{k \in N} c_k} E, c_j \right\}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az arányos elosztási szabály esetén a vagyont a követelések arányában osztják fel, azzal a megkötéssel, hogy senki sem kaphat többet, mint a követelése.

A pénzügyi hálózatokra alkalmazott arányos csődszabály a csődproblémák esetén használt arányos elosztási szabályon alapul. A csődproblémákra alkalmazott elosztási szabályokat Csóka és Herings [4] megközelítése alapján terjesztjük ki pénzügyi hálózatoknál tekintett csődszabályokra. (Lásd még Groote Schaarsberg, Reijnierse és Borm [12] kapcsolódó tanulmányát, melyben a kifizetési mátrixok helyett a saját tőkére helyezik a hangsúlyt.)

**3.2. Definíció.** A  $p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$  függvény *arányos csődszabály*, ha minden  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$  hálózathoz a  $p(N, z, L) = P$  mátrixot rendeli, ahol  $P$  a következő egyenletrendszer megoldása:

$$P_{ij} = d_j^a(a_i(N, z, P), L_i), \quad i, j \in N. \quad (1)$$

A definíciónak megfelelően a pénzügyi hálózatok esetén a  $p$  arányos csődszabály az ágensek vagyonának az eszközeik értékét tekinti, majd az arányos elosztási szabállyal elosztja ezt az eszközértéket a tartozásokkal arányosan. Az (1)-es egyenletben az  $i$ -edik ágens úgy kezelendő, mint akinek a saját  $a_i(N, z, P)$  vagyonára vonatkozóan nincs követelése ( $L_{ii} = 0$ ), így önmagának nem fizet semmit. Használva  $d_j^a(a_i(N, z, P), L_i)$  definícióját, megadhatjuk az (1) egyenletrendszert úgy, hogy minden  $i, j \in N$  esetén

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } L_{ij} = 0, \\ \min \left\{ \frac{L_{ij}}{\sum_{k \in N} L_{ik}} a_i(N, z, P), L_{ij} \right\}, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (2)$$

Eisenberg és Noe [6] belátja, hogy a (2)-beli egyenletrendszernek csak egy megoldása van, így a  $p$  arányos csődszabály jól definiált.

Az arányos csődszabály illusztrálására tekintsük az alábbi példát Csóka és Herings [4] jelenleg kéziratban lévő átirata alapján.

**3.1. Példa.** Tekintsük az  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$  pénzügyi hálózatot három ágens,  $N = \{1, 2, 3\}$  esetén az 1. táblázat első két oszlopában látható induló készletekkel és tartozásokkal. Ekkor a  $p$  arányos csődszabály eredményeként kapott  $P$  fizetési mátrixot, eszközértékeket és saját tőkét szintén az 1. táblázatban láthatjuk.

Vegyük észre, hogy a 2. ágens már a kiinduló állapotban is csődhelyzetben van, mivel a kötelezettségeit még akkor sem tudja maradéktalanul teljesíteni, ha az összes követelését teljes mértékben kiegyenlítik. Ezzel szemben a 3. ágens fertőzés miatt jut csődbe. Végül a 2. ágens kötelezettségeinek 70%-át, míg a 3. ágens 90%-át tudja megfizetni.

Eisenberg és Noe [6] a (2)-beli egyenletrendszer megoldására a következő algoritmust javasolja. Először tegyük fel, hogy minden ágens kifizeti minden tartozását, vagyis a minimum függvény mindenkinél  $L_{ij}$ . Ha így keletkeznek negatív

$z$	$L$			$P$			$a(N, z, P)$	$e(N, z, P)$
10	0	0	0	0	0	0	53	53
19	10	0	30	7	0	21	28	0
24	40	10	0	36	9	0	45	0

1. táblázat. A 3.1. Példának megfelelő induló készletek, tartozások, és a  $p$  arányos csődszabály alkalmazásával kapott fizetési mátrix, eszközértékek és saját tőke értékek.

saját tőkájú ágensek, akkor náluk a minimum függvényt helyettesítsük annak első elemével, ezek a bankok már biztosan csődben lesznek. Ha még így is keletkeznek a fertőzés miatt új negatív saját tőkájú ágensek, akkor náluk is helyettesítsük a minimum függvényt annak első elemével, és így tovább. Mivel potenciálisan véges új bank mehet csődbe fertőzés miatt, az algoritmus véges lépésben véget ér. Ezt az algoritmust némileg módosítja Elliott, Golub és Jackson [7], valamint Rogers és Veraart [20]. Csóka és Herings [4] egy lineáris programozási feladat megoldásaként kapja a megoldást, ahol a cél az, hogy mindenki minél többet fizessen, korlátolt felelősség mellett.

Az arányos csődszabály egyik lehetséges kiterjesztése az, ha előbb az ágens páronként nettósítanak, majd az így kapott tartozási mátrixra (ahol minden  $i, j \in N$  ágensre fennáll, hogy vagy  $L_{ij} = 0$ , vagy  $L_{ji} = 0$ ) alkalmazzák az arányos csődszabályt.

**3.3. Definíció.** A  $pna : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$ , páronként nettósító arányos csődszabály egy olyan függvény, amely minden  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$  hálózathoz a  $pna(N, z, L)$  fizetési mátrixot rendeli, ahol

$$pna(N, z, L) = \min\{L, L^\top\} + p(N, z, L - \min\{L, L^\top\}). \quad (3)$$

A páronként nettósító arányos csődszabály esetén tehát először a páronként nettósító fizetések történnek meg, majd a maradék tartozásokra alkalmazzák az arányos csődszabályt. Könnyen látható, hogy a páronként nettósító arányos csőd-szabály, a  $pna$  is az  $\mathcal{M}(N)$ -beli valós számokat tartalmazó fizetési mátrixokra vezet.

Az elosztási szabályok egy másik példája a *korlátos egyenlő díjazás* (CEA, *constrained equal awards*) elosztási szabály. Ha  $E > \sum_{j \in N} c_j$ , akkor legyen  $\lambda = \max_{j \in N} c_j$ . Egyébként legyen  $\lambda \in [0, \max_{j \in N} c_j]$  a

$$\sum_{j \in N} \min\{c_j, \lambda\} = E$$

egyenlet egyértelmű megoldása. A CEA elosztási szabály minden  $j \in N$  ágenshez a

$$d_j^{\text{cea}}(E, c) = \min\{c_j, \lambda\}$$



összeget rendeli, tehát minden ágens azonos összeget kaphat, de legfeljebb a követelésük mértékéig.

Hasonló módon megadhatjuk a *korlátos egyenlő veszteség* (*CEL, constrained equal losses*) elosztási szabályt, amely az előző duálisának tekinthető. Ha  $E > \sum_{j \in N} c_j$ , akkor legyen  $\mu = 0$ , egyébként pedig legyen  $\mu \in [0, \max_{j \in N} c_j]$  az alábbi egyenlet egyértelmű megoldásaként definiálva:

$$\sum_{j \in N} \max\{c_j - \mu, 0\} = E.$$

Ekkor a CEL elosztási szabály a  $j \in N$  ágenshez a

$$d_j^{\text{cel}}(E, c) = \max\{c_j - \mu, 0\}$$

összeget rendeli, vagyis minden követelő azonos veszteséggel néz szembe, de legfeljebb a követelésük mértékéig.

Az arányos csődszabálynál látotthoz hasonló módon más elosztási szabályokat is kiterjeszthetünk pénzügyi hálózatokra, ugyanakkor általánosságban véve a kapott fizetési mátrix nem egyértelmű, így a csődszabály megadásánál valamilyen módon ki kell jelölnünk, hogy pontosan melyik fizetési mátrixra gondolunk.

**3.4. Definíció.** Legyen adott egy  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$  pénzügyi hálózat és  $(d^i)_{i \in N}$  elosztási szabályok egy rendszere. Ekkor a  $P \in \mathcal{M}(N)$  fizetési mátrixot *klíringmátrixnak* (*clearing payment matrix*) nevezzük, ha megoldása az alábbi egyenlet-rendszernek:

$$P_{ij} = d_j^i(a_i(N, z, P), L_i), \quad i, j \in N.$$

Ha minden ágens az arányos elosztási szabályt alkalmazza, akkor Eisenberg és Noe [6] 2. Tételének következtében a klíringmátrix egyértelmű. Ugyanakkor, ha az ágensok a CEA elosztási szabályt használják, akkor a klíringmátrix már nem feltétlenül egyértelműen definiált.

**3.2. Példa.** Csóka és Herings [4] alapján tekintsünk egy  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$  pénzügyi hálózatot és  $(d^i)_{i \in N}$  elosztási szabályokat  $N = \{1, 2, 3\}$  három ágenssel, ahol  $d^1 = d^2 = d^3 = d^{\text{cea}}$ . A 2. táblázat mutatja az induló készleteket, a tartozásokat, a  $P^-$  és  $P^+$  legkisebb, illetve legnagyobb klíringmátrixokat, valamint az eredményül kapott eszközértékeket és saját tőkéket.

Az arányos elosztási szabálytól eltérően, általánosságban véve nincs garancia arra, hogy a klíringmátrix a 3.4. Definíciónak megfelelően egyértelműen meghatározott lenne. Ugyanakkor az már teljesül, hogy van egyértelműen meghatározott legkisebb és legnagyobb klíringmátrix.

A háló (*lattice*) egy olyan részbenrendezett halmaz, amelyben bármely két elemnek van szuprémuma és infimuma. A teljes háló (*complete lattice*) egy olyan háló, amelyben bármely nemüres halmaznak van szuprémuma és infimuma. Az alábbi tétel bizonyítása Tarski [23] fixponttételén alapul, és Csóka és Herings [5] diszkrét esetre adott bizonyításának kézenfekvő módosításával igazolható.

$z$	$L$			$P^-$			$a(N, z, P^-)$	$e(N, z, P^-)$	$P^+$			$a(N, z, P^+)$	$e(N, z, P^+)$
1	0	2	1	0	1	1	2	0	0	2	1	3	0
1	2	0	1	1	0	1	2	0	2	0	1	3	0
1	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	3	3

2. táblázat. A  $P^-$  és  $P^+$  klíringmátrixok és az eredményül kapott eszközértékek és saját tőkéek a korlátos egyenlő díjazás (CEA) elosztási szabály alkalmazása mellett a 3.2. Példában az  $F = (N, z, L)$  pénzügyi hálózatra.

3.1. TÉTEL. Tekintsünk egy  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$  pénzügyi hálózatot és  $(d^i)_{i \in N}$  elosztási szabályokat. A klíringmátrixok halmaza egy teljes háló. Ennek következtében pedig létezik egy  $P^-$  legkisebb klíringmátrix és egy  $P^+$  legnagyobb klíringmátrix.

A pénzügyi hálózatok esetében a csődproblémákra alkalmazott elosztási szabályokon alapuló csődszabályok definiálásához a legnagyobb klíringmátrixot választjuk.

3.5. Definíció. A  $b : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$  csődszabály a  $(d^i)_{i \in N}$  elosztási szabályokon alapul, ha minden  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$  esetén teljesül, hogy  $b(N, z, L) = P^+$ , ahol  $P^+$  a legnagyobb klíringmátrix az  $(N, z, L)$  pénzügyi hálózatra és a  $(d^i)_{i \in N}$  elosztási szabályokra.

A legnagyobb klíringmátrix választása azért kézenfekvő, mert a korábban említett algoritmusok általánosítása mindig erre vezet. Ugyanakkor elvileg választható lenne a legkisebb klíringmátrix, vagy a legkisebb és a legnagyobb tetszőleges konvex kombinációja is.

A 3.5. Definíció alkalmazásával a  $cea : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$  korlátos egyenlő díjazás szabályt kapjuk, ha minden ágens a korlátos egyenlő díjazás elosztási szabályt használja, valamint a  $cel : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$  korlátos egyenlő veszteség szabályhoz jutunk, ha minden ágens a korlátos egyenlő veszteség elosztási szabályt alkalmazza. Nem minden pénzügyi hálózaton tekintett csődszabály alapul elosztási szabályokon. Egy példa erre a korábban megadott páronként nettósító arányos szabály, ahol a kifizetések nem csupán az ágensek eszközértékeitől és tartozásaitól függenek, hanem a többi ágens felé meglévő követeléseitől is.

Habár a klíringmátrixok nem mindig egyértelműek, az eredményül kapott saját tőke értékek azok. A 3.2. Példában megfigyelhetjük, hogy a  $P^-$  és  $P^+$  fizetési mátrixok ugyanazokat a saját tőke értékeket eredményezik. Az alábbi tétel Groote Schaarsberg, Reijnierse és Borm [12] eredményének általánosítása. A szerzők azzal a feltételezéssel élnek, hogy minden ágens ugyanazt az elosztási szabályt használja, azonban a bizonyításuk kiterjeszthető arra az esetre is, amikor az ágensek akár különböző elosztási szabályokkal is élhetnek.

3.2. TÉTEL. Tekintsünk egy  $(N, z, L) \in \mathcal{F}$  pénzügyi hálózatot és  $(d^i)_{i \in N}$  elosztási szabályokat. Legyenek  $P$  és  $P'$  klíringmátrixok. Ekkor minden  $i \in N$  esetén  $e_i(N, z, P) = e_i(N, z, P')$ .

#### 4. Összefoglalás

A tanulmányban áttekintettük a csődszabályok irodalmát és legfontosabb definícióit. A klasszikus csődproblémák bevezetése után részletesen tárgyaltuk az erre épülő pénzügyi hálózatokat és különböző csődszabályokat.

Kitekintést adtunk a legfontosabb kapcsolódó területekre a játékelmélet, a probabilisztikus problémák, a rendszerkockázat és a központi klíring vonatkozásában.

A további kutatási irányok szerteágazóak. Tovább lehet elemezni az arányos csődszabály már meglévő axiómáit, vagy más axiomatizálást is lehet keresni rá, vagy más csődszabályokra. A rendszerkockázat elemzése dinamikus modellekkel szintén ígéretes.

#### 5. Köszönetnyilvánítás

A kutatás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-4-BCE-17 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának szakmai támogatásával készült.

#### Hivatkozások

- [1] BALOG, D., BÁTYI, T. L., CSÓKA, P. ÉS PINTÉR, M.: *Pénzügyi hálózatok modellezése Jackson és Watts (2002) nyomán*, In *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára*, pp. 51-168. Aula Kiadó, Budapest (2012). ISBN 978-963-339-018-4
- [2] BERLINGER, E., MICHALETZKY, M. ÉS SZENES, M.: *A fedezetlen bankközi forintpiac hálózati dinamikájának vizsgálata a likviditási válság előtt és után*, Közgazdasági Szemle, Vol. **58** No. **3**, pp. 229-252 (2011).
- [3] CSÓKA, P.: *Az arányos csődszabály karakterizációja körbetartozások esetén*, Közgazdasági Szemle, Vol. **64** No. **9**, pp. 930-942 (2017). DOI: [10.18414/KSZ.2017.9.930](https://doi.org/10.18414/KSZ.2017.9.930)
- [4] CSÓKA, P. AND HERINGS, P. J.-J.: *An axiomatization of the proportional rule in financial networks*, GSBE Research Memoranda, (001) (2016). DOI: [10.2139/ssrn.2902653](https://doi.org/10.2139/ssrn.2902653)
- [5] CSÓKA, P. AND HERINGS, P. J.-J.: *Decentralized clearing in financial networks*, Management Science, Vol. **64** No. **10**, pp. 4681-4699 (2018). DOI: [10.1287/mnsc.2017.2847](https://doi.org/10.1287/mnsc.2017.2847)
- [6] EISENBERG, L. AND NOE, T. H.: *Systemic risk in financial systems*, Management Science, Vol. **47** No. **2**, pp. 236-249 (2001). DOI: [10.1287/mnsc.47.2.236.9835](https://doi.org/10.1287/mnsc.47.2.236.9835)
- [7] ELLIOTT, M., GOLUB, B. AND JACKSON, M. O.: *Financial networks and contagion*, American Economic Review, Vol. **104** No. **10**, pp. 3115-53 (2014). DOI: [10.1257/aer.104.10.3115](https://doi.org/10.1257/aer.104.10.3115)
- [8] ELSINGER, H., LEHAR, A. AND SUMMER, M.: *Risk assessment for banking systems*, Management Science, Vol. **52** No. **9**, pp. 1301-1314 (2006). DOI: [10.1287/mnsc.1060.0531](https://doi.org/10.1287/mnsc.1060.0531)
- [9] FEINSTEIN, Z., PANG, W., RUDLOFF, B., SCHAANNING, E., STURM, S. AND WILDMAN, M.: *Sensitivity of the Eisenberg-Noe clearing vector to individual interbank liabilities*, SIAM Journal on Financial Mathematics, Vol. **9** No. **4**, pp. 1286-1325 (2018). DOI: [10.1137/18M1171060](https://doi.org/10.1137/18M1171060)

- [10] FLORES-SZWAGRZAK, K., GARCÍA-SEGARRA, J. AND GINÉS-VILAR, M.: *Priority and proportionality in bankruptcy*, Social Choice and Welfare, Vol. **54** No. **4**, pp. 559-579 (2020). DOI: [10.1007/s00355-019-01219-0](https://doi.org/10.1007/s00355-019-01219-0)
- [11] GARRATT, R. AND ZIMMERMAN, P.: *Centralized netting in financial networks*, Journal of Banking & Finance, Vol. **112**, paper 105207 (2017). DOI: [10.1016/j.jbankfin.2017.12.008](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2017.12.008)
- [12] GROOTE SCHAARSBERG, M., REIJNIERSE, H. AND BORM, P.: *On solving mutual liability problems*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. **87** No. **3**, pp. 383-409 (2018). DOI: [10.1007/s00186-017-0621-1](https://doi.org/10.1007/s00186-017-0621-1)
- [13] HABIS, H.: *Sztoczasztikus csődjátékok - avagy hogyan osszunk szét egy bizonytalan méretű tortát?*, Közgazdasági Szemle, Vol. **59** No. **12**, pp. 1299-1310 (2012).
- [14] HOUY, N., JOUNEAU, F. AND LE GRAND, F.: *Defaulting firms and systemic risks in financial networks: a normative approach*, Economic Theory, pp. 1-24 (2019). DOI: [10.1007/s00199-019-01217-4](https://doi.org/10.1007/s00199-019-01217-4)
- [15] JACKSON, M. O. AND PERNOUD, A.: *What makes financial markets special? Systemic risk and its measurement in financial networks*, SSRN (2019). DOI: [10.2139/ssrn.3311839](https://doi.org/10.2139/ssrn.3311839)
- [16] KOSTER, M.: *A note on uniqueness of clearing prices in financial systems*, SSRN (2019). DOI: [10.2139/ssrn.3427039](https://doi.org/10.2139/ssrn.3427039)
- [17] LUBLÓY, Á.: *Dominóhatás a magyar bankközi piacon*, Közgazdasági Szemle, Vol. **52** No. **4**, pp. 377-401 (2005)
- [18] O'NEILL, B.: *A problem of rights arbitration from the Talmud*, Mathematical Social Sciences, Vol. **2** No. **4**, pp. 345-371 (1982). DOI: [10.1016/0165-4896\(82\)90029-4](https://doi.org/10.1016/0165-4896(82)90029-4)
- [19] PÁLVÖLGYI, D., PETERS, H. AND VERMEULEN, D.: *A strategic approach to multiple estate division problems*, Games and Economic Behavior, Vol. **88**, pp. 135-152 (2014). DOI: [10.1016/j.geb.2014.09.005](https://doi.org/10.1016/j.geb.2014.09.005)
- [20] ROGERS, L. C. AND VERAART, L. A.: *Failure and rescue in an interbank network*, Management Science, Vol. **59** No. **4**, pp. 882-898 (2013). DOI: [10.1287/mnsc.1120.1569](https://doi.org/10.1287/mnsc.1120.1569)
- [21] SCHULDENZUCKER, S., SEUKEN, S. AND BATTISTON, S.: *Default ambiguity: Credit default swaps create new systemic risks in financial networks*, Management Science (2019). DOI: [10.1287/mnsc.2019.3304](https://doi.org/10.1287/mnsc.2019.3304)
- [22] STUTZER, M.: *The bankruptcy problem in financial networks*, Economics Letters, Vol. **170**, pp. 31-34 (2018). DOI: [10.1016/j.econlet.2018.05.034](https://doi.org/10.1016/j.econlet.2018.05.034)
- [23] TARSKI, A.: *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. **5** No. **2**, pp. 285-309 (1955).
- [24] TASNÁDI, A.: *On probabilistic rationing methods*, Mathematical Social Sciences, Vol. **44** No. **2**, pp. 211-221 (2002). DOI: [10.1016/S0165-4896\(02\)00014-8](https://doi.org/10.1016/S0165-4896(02)00014-8)
- [25] THOMSON, W.: *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*, Mathematical Social Sciences, Vol. **45** No. **3**, pp. 249-297 (2003). DOI: [10.1016/S0165-4896\(02\)00070-7](https://doi.org/10.1016/S0165-4896(02)00070-7)



Csóka Péter 2003-ban szerzett közgazdász diplomát a Budapesti Corvinus Egyetem jogelődjén. Doktori fokozatát 2008-ban a Maastrichti Egyetemen szerezte. 2008 óta a Budapesti Corvinus Egyetem oktatója és kutatója, 2019 óta egyetemi tanár. 2011 óta a Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont Játékelméleti kutatócsoportjának kutatója. Kutatásaiban elméleti közgazdaságtani módszereket használ befektetések, kockázatkezelés, vállalati pénzügyi kérdések, likviditási problémák és pénzügyi hálózatok vizsgálatára. 12 angol

és 10 magyar referált cikk szerzője, jelenleg az MTMT-ben a független hivatkozásainak száma 237, h-indexe 10. 2012 óta az évenként Budapesten megrendezett Annual Financial Market Liquidity Conference egyik főszervezője. 2018 óta a MTA Közgazdaság-tudományi Bizottság, Pénzügytani Albizottságának elnöke. 2019-ben a Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület elnökségi tagja lett. 2019-ben Bolyai János kutatási ösztöndíjat nyert.

#### CSÓKA PÉTER

Budapesti Corvinus Egyetem  
1093 Budapest, Fővám tér 8.  
peter.csoka@uni-corvinus.hu

Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont  
Közgazdaság-tudományi Intézet  
1097 Budapest, Tóth Kálmán u. 4.  
csoka.peter@krtk.mta.hu



Kondor Gábor 2015-ben végzett az ELTE és a Budapesti Corvinus Egyetem közösen indított Biztosítási és Pénzügyi Matematika képzésén, Kvantitatív Pénzügyek szakirányon. Ezután kezdte meg PhD tanulmányait a Budapesti Corvinus Egyetem Általános és Kvantitatív Közgazdaságtan Doktori Iskolájában, ahol jelenleg doktorjelölt státuszban van. Fő kutatási területei volatilitás-derivatívák árazása és klaszterezési problémák. Három cikk társszerzője. 2015 óta az Annual Financial Market Liquidity Conference konferencia kiadványának szerkesztője.

#### KONDOR GÁBOR

Budapesti Corvinus Egyetem  
1093 Budapest, Fővám tér 8.  
gabor.kondor@uni-corvinus.hu

## BANKRUPTCY RULES IN FINANCIAL NETWORKS

PÉTER CSÓKA, GÁBOR KONDOR

Financial networks are most commonly used for measuring and managing systemic risk. In a financial network, everyone has a cash endowment, and all agents can have liabilities towards other agents. Bankruptcy rules specify how to settle debts. Agents with the same priority are often paid in proportion to their claims, but there are also more complex arrangements. Because payments are interdependent, fixed points generally provide a solution to the problem. This paper reviews the literature on bankruptcy rules, the most important definitions, and the results.

## EGYENSÚLYI ÁR OLIGOPOLISZTIKUS VERSENYKÖRNYEZETBEN, TÖKÉLETLEN INFORMÁLTSÁG ESETÉN

SZABÓ BALÁZS, SEBESTYÉN TAMÁS

Tanulmányunkban oligopolisztikus versenymodellben vizsgáljuk meg, hogy a szereplők nem teljes kapcsoltsága, ilyen értelemben az informáltság korlátozottsága, milyen következményekkel jár az árak alakulására. Ez a megközelítés újdonság a sztenderd modellezési kerethez képest, amelyek a szereplők teljes kapcsoltságát, így az aggregált árindex pontos ismeretét feltételezik. Modellünkben a kapcsolati szerkezet tetszőleges, ami az egyes szereplők által érzékelt árindexek különbözőségéhez vezet, így a sztenderd modell szimmetriája sérül. Piactisztítást feltételezve igazoljuk, hogy intuitív feltételek fennállása esetén egyértelműen létezik nemnegatív egyensúlyi árvektor (tisztá stratégián alapuló Nash-egyensúly). Munkánkban a modell módszertani oldalára fókuszálunk, elsősorban egzisztencia- és további kiegészítő bizonyítások bemutatása a célunk.

### 1. Bevezetés

A sztenderd oligo- és monopolisztikus versenymodellek lényeges feltevése, hogy a termelők homogének, egyrészt technológiai értelemben, másrészt pedig a tekintetben, hogy a fogyasztók valamennyi termelő termékét fogyasztják, az árakat tekintve teljes körűen informáltak, így az aggregált árindexre vonatkozóan pontos percepcióik vannak. Ha azonban feltesszük, hogy a fogyasztók nem minden termelővel állnak kapcsolatban, akkor csak egy részpiacra vonatkozóan lesznek ismereteik az árakról, így az általuk érzékelt árindex fogyasztónként eltér. Racionális termelőket feltételezve ezeket az érzékelt árindexeket a termelők is figyelembe veszik árdöntéseik meghozatalánál, aminek következtében a profitmaximalizáló ár meghatározása komplex stratégiai interakciók eredményévé válik.

Munkánkban a termelőnként potenciálisan különböző egyensúlyi ár létezésének lehetőségét vizsgáljuk oligopolisztikus versenykörülmények mellett, valamint a fentieknek megfelelően feltéve, hogy a termelőket és a fogyasztókat összekötő hálózati struktúra nem teljes. Tehát azzal általánosítjuk a sztenderd modellt, hogy az egyes fogyasztók nem feltétlenül vásárolnak minden termelőtől, a termelők pedig

nem feltétlenül értékesítenek minden fogyasztónak. A termelőket és a fogyasztókat összekötő, az előbbieknél megfelelően nem feltétlenül teljes hálózatot exogén adottságnak tételezzük fel és megvizsgáljuk, hogy lehetséges-e egyensúlyi (minden termelőnél egyszerre profitot maximalizáló) ármeghatározás, illetve az egyensúlyi árak milyen tulajdonságokkal bírnak ebben az esetben.

A többszereplős, alapvetően termelők és fogyasztók kapcsolatrendszerét a fókuszba helyező modellben az előbbi kapcsolatrendszert leíró exogén hálózati struktúra mellett az egyes fogyasztók adott termékekkel szembeni lineáris keresleti függvényei is kulcsszerepet játszanak: ezek határozzák meg a modell endogén változóinak, elsősorban a termelők által beállított áraknak és termelési volumeneknek az értékeit. A lineáris keretrendszer alkalmazása a modell főbb tulajdonságait nem befolyásolja, azonban matematikailag könnyebben kezelhető formát ad a probléma vizsgálatához.

Tanulmányunk teoretikus jellegű, mikroökonómiai, valamint játékelméleti irányultságú, célja az egyensúlyi árak létezésének bizonyítása a fent vázolt környezetben. Az egzisztencia-bizonyításokból több változatot mutatunk be, ezzel bepillantást engedve a hasonló problémákat taglaló modellek lehetséges módszertani megközelítésébe.

Az utóbbi időben számos tanulmány foglalkozott termelők közötti kapcsolatrendszerek modellezésével, kiemelve ezek hálózati aspektusát, különös tekintettel a hálózati szerkezet jelentőségére (lásd például [1], [8], [11], [17], [18]). Ezek a munkák mind kiemelik, hogy egy többszereplős modellben lényeges, hogy az egyes aktorokat összekötő kapcsolatrendszer milyen jellemzőkkel bír. A [17]-ben vázolt modell egy általánosított input-output modellkeretből indul ki és az egyes ágensek közti kapcsolatokat úgynevezett interakciós függvényekkel írja le. Kimutatják, hogy a termelőket érő idioszinkratikus sokkok hatását az input-output hálózat aszimmetriája képes felerősíteni, hozzájárulva ezzel a makroszintű kibocsátás volatilitásához. Jellemzőből fakadóan az input-output modellekben csak egy szereplőtípus, a termelők közötti hálózat tulajdonságai vizsgálhatók. Jelen tanulmány ezzel szemben egy piac két oldalát (fogyasztó illetve termelő) expliciten megjeleníti és a két szereplőtípus közti kapcsolatrendszert vizsgálja – azonban nem vizsgál egyedi sokkhatásokat. A [2]-ben bemutatott modell, hasonlóan az általunk használt modellhez, már két szereplőtípussal dolgozik: termelők és fogyasztók egy hálózatba rendezett struktúráját vizsgálja. Elemzésük azonban csak duopóliumra (Bertrand-duopólium) terjed ki a termelői oldalon, és a fogyasztókat összekötő hálózat szerkezetéből fakadó hálózati externáliák hatását vizsgálják a termelők egyensúlyi árazási magatartására. A fogyasztók közötti kapcsolatokra koncentrálna ez a modell nem foglalkozik a fogyasztók és a termelők nem teljes kapcsoltságából eredő korlátozott árinformációkkal, amely viszont a jelen tanulmányban bemutatott modell kulcseleme.



Általánosabb hálózati játék keretein belül a [3] szerzői megmutatják, hogy az egyedi hálózati szereplők eredményessége függ a hálózatban elfoglalt helyzetüktől (centralitásuktól), valamint a hálózati rendszer aggregált teljesítménye is összefügg a hálózati szerkezettel. A modell többszereplős, de egyetlen szereplőtípust alkalmaz, szemben az általunk használt kéttípusos felépítéssel. Ehhez hasonló többszereplős, de egy típussal dolgozó modell található [5]-ben, amelyben a szereplők kapcsoltságát reprezentáló gráf nem (feltétlenül) teljes, és exogén adottságként jelenik meg, akárcsak a mi megközelítésünkben. Egy teljes információs játékot elemeznek és a legjobb-válasz alapján a Nash-egyensúly unicitását vizsgálják. A [9]-ben bemutatott modell kvadratikus kifizetőfüggvény mellett egy súlyozatlan, exogén, nem feltétlenül teljes hálózatot vesz alapul továbbra is egyetlen ágenstípus mellett. A hálózati hatások itt a hasznossági függvényen keresztül jelentkeznek, ami az egyéni erőfeszítések hatása mellett tartalmazza a nem egyéni jellegű erőfeszítések (peer effort) hatásait is.

A [6]-ban bemutatott többszereplős modell már két szereplőtípussal, termelőkkel és fogyasztókkal dolgozik. A kapcsolati szerkezetet (hálózatot) viszont [2]-höz hasonlóan a fogyasztók között (exogén adottságként) vizsgálja. A fogyasztók hasznossági függvényében megjelenik a termékár, azonban nem viszonyítják az adott termék árát egy általuk ismert benchmarkhoz (árindekhöz), ahogy ez az általunk használt modellben történik. Hasonló modell található [10]-ben, ahol a kifizetőfüggvény háttérében egy exogén, fogyasztók között értelmezett súlyozott kapcsolati háló áll. Termelői oldalon elsősorban duopóliumot feltételeznek, de megjelenik az oligopol vagy monopol struktúra is. Egy adott fogyasztó hasznossági függvénye figyelembe veszi egyrészt azt, hogy a vele kapcsolatban álló fogyasztók mennyit fogyasztanak, másrészt azt az összkiadást, amelyet az általa fogyasztani kívánt termékek mennyisége eredményez (így megjelennek a függvényekben a termékárak is). Itt sem jelenik azonban meg a kifizetőfüggvényben az árindex, mint referenciaár. Monopolisztikus verseny, termékdifferentiálás és egyfajta térbeliség (térgazdasági dimenzió) is megjelenik a [16]-ban bemutatott modell esetében. Szintén exogén, a termelők között értelmezett súlyozatlan hálózatot definiálnak, amely nem feltétlenül teljes. Ezen a struktúrán egy kvadratikus hasznossági függvényt határoznak meg, melyből olyan keresleti függvényt származtatnak, amelyben az általunk használt módszerhez hasonlóan már megjelenik egy bizonyos típusú árindex. Ez az árindex az árak súlyozott összege, a súlyokat pedig a Bonacich-centralitás (lásd [7]) alapján definiálják. Bár ez a módszer is figyelembe veszi az árazás során a hálózati szerkezetet, azonban egyrészt a termelői hálózaton belüli centralitás alapján egységesen súlyoz szemben az általunk használt termelő-fogyasztó hálózattal, másrészt az árindex súlyait közvetlenül a centralitáshoz köti, míg a mi esetünkben az árindexek az egyes fogyasztók számára különbözőek lehetnek. Fontos megkövetés az is, hogy a fogyasztók és termelők száma azonos, ami azonban az általunk bemutatott modellben nem feltétel.

Összességében az látszik, hogy a hasonló problémát vizsgáló tanulmányok jellemzően hálózati játékként vizsgálják a kérdést és kiindulási pontjuk valamilyen kvadratikus hasznossági függvény. Az általunk használt modell mellőzi a hasznossági megalapozást, ezzel szemben egy jól definiált egyedi keresleti függvényre épít. Hangsúlyos szerepe van a hálózati szerkezetet megjelenítő, termelő-fogyasztó-típusú páros gráfnak, ami szintén megkülönbözteti modellünket a korábban vizsgált problémáktól – az árazási magatartásban így a kétfajta szereplő interakciós hálózatából fakadó hatásokat tudjuk vizsgálni. Ez utóbbira mindeddig nem találunk példát a szakirodalomban.

A cikk további felépítése a következő: a jelen, szakirodalmi kitekintéssel egybekötött, bevezetést követően a második részben felírjuk az alapmodellt, a harmadikban vázoljuk a vizsgálni kívánt problémát, és ismertetjük az egyensúlyi árvektor létezésére, egyértelműségére vonatkozó bizonyítást (főbizonyítás), majd az ezt követő fejezetekben három további (kiegészítő) részbizonyítást mutatunk be. Tanulmányunkat összegzéssel zárjuk.

Itt jegyezzük meg, hogy a (fő)bizonyítást követő további bizonyítások – más-más módszertani eszközök segítségével – az első bizonyítás egyes részleteit reprodukálják. Tehát (mindössze) az első bizonyítás valamely részletét közelítik meg a további (rész)bizonyítások újabb szemszögből és eszközök felhasználásával.

## 2. Az alapmodell leírása

Induljunk ki egy  $N \geq 2$  szereplős cseregazdaságból. Ebben a modellgazdaságban az egyes szereplők interakcióba lépnek egymással, és értékesítik egymás számára termékeiket, illetve a termeléshez szükséges munkaidejüket/munkaóráikat (röviden, munkát). Egy adott termelő csak egyetlen termékárral dolgozik. Minden termelő informált a vele kapcsolatban lévő fogyasztók döntéshozatali szabályaira, valamint a versenytársak áaira nézve. A korlátozott információk a fogyasztók oldaláról jelentkeznek, legalábbis abban az értelemben, hogy csak azon termékárakat ismerik, amely termelőkkel közvetlen kapcsolatban állnak – illetve csak ezeket veszik tekintetbe. Alkalmazzuk a versenyzői piacok szokásos feltevését, miszerint a termelők piaci súlya viszonylag kicsi, így árdöntéseik nincsenek hatással a többiek ármeghatározására, azaz *saját termékárunk az egyetlen döntési változó*. Emellett a szereplők tranzakciós költségeitől eltekintünk, valamint a termékeket végtelenül oszthatónak gondoljuk. Az alapmodellben főszabály szerint oligopolisztikus körülményeket tételezünk fel a termékpiacon, de a munkapiac tökéletesen versenyző. Feltesszük még, hogy a gazdaságban az időegységre eső munkabér homogén, azaz minden termelő ugyanakkora óráért fizet munkavállalóinak. Technikai megjegyzésként előrebocsátjuk, hogy az alábbiakban csak ott és akkor jelezzük a függvényargumentumot, ahol és amikor azt kifejezetten hangsúlyozni szeretnénk.

A szereplők közötti interakciót az (exogén)  $\mathbf{A}$  kapcsolati mátrix írja le, ahol a mátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme,  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  azt mutatja meg, hogy a  $j$ -edik szereplő fogyaszt-e  $i$ -től ( $a_{ij} = 1$ ), vagy sem ( $a_{ij} = 0$ ).

A továbbiakban élesen elhatároljuk a termelői és fogyasztói oldalt, előbbit az  $\{1, 2, \dots, M\}$ , míg utóbbit az  $\{1, 2, \dots, N - M\}$  halmazzal indexeljük,  $N > M \geq 2$ . Következésképpen tudjuk, hogy  $\mathbf{A} \in \{0, 1\}^{M \times (N-M)}$  fennáll.

Tegyük fel, hogy a  $j$ -edik szereplő keresletét az  $i$ -edik szereplő termékével szemben az  $x_{ij}$  keresleti függvény adja meg:

$$x_{ij} = b_{ij} [\gamma_j - \epsilon (p_i - \bar{p}_j)], \quad (1)$$

ahol  $b_{ij} = a_{ij} / \sum_{k=1}^M a_{kj}$ ,  $\gamma_j > 0$  egy rögzített konstans,  $\epsilon > 0$  a termékek differenciáltságához kapcsolódó érzékenységi paraméter,  $p_i$  a  $i$ -edik szereplő termékének ára,  $\bar{p}_j$  pedig a  $j$ -edik szereplő által érzékelt árindex. Utóbbit a következő súlyozott átlaggal határozzuk meg:

$$\bar{p}_j = \sum_{k=1}^M b_{kj} p_k, \quad (2)$$

mivel teljesül, hogy  $\sum_{k=1}^M b_{kj} = 1$ .<sup>1</sup>

A későbbiekre nézve, a könnyebb átláthatóság érdekében  $b_{ij}$ -t átírjuk:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_j}, \quad (3)$$

ahol  $d_j = \sum_{k=1}^M a_{kj}$  a  $j$ -edik szereplő foksámát, jelen kontextusban a fogyasztott termékvariánsok számát jelenti. A  $b_{ij}$  értékeket rendezzük a  $\mathbf{B}$  mátrixba! Könnyen ellenőrizhető, hogy ennek a mátrixnak a  $j$ -edik oszlopában 0-k és pontosan  $d_j$  számú  $1/d_j$  érték áll.

Mivel modellünk oligopolisztikus versenyfeltételek között értelmezett, ezért a továbbiakban érdemes feltételezni, hogy minden fogyasztó legalább két termékváltozatot fogyaszt. Következésképpen minden  $j$ -re  $d_j \geq 2$ . Ez pedig azt eredményezi, hogy  $b_{ij} \leq 1/2$  minden  $i$  és  $j$  párra.

<sup>1</sup>A (1) keresleti függvényt nem értelmezzük, ha: (i)  $\epsilon \rightarrow 0$ , tehát ha a termékeket vásároló fogyasztók érzéketlenek az árváltozásra; (ii)  $\epsilon \rightarrow \infty$ , tehát ha a termékeket vásároló fogyasztók „végtelenül” érzékenyek az árváltozásra; (iii) adott fogyasztó által vásárolt termékvariánsok száma minden határon túl növekszik (ez burkoltan feltételezi a termelők számának minden határon túli növekedését). Következésképpen a (1) szerinti keresleti függvény biztosan nem alkalmas a tökéletes verseny leírására. Emellett az alábbiakban bevezetünk még egy korlátozást, amely a monopóliumok modellezését zárja ki. Tehát oligopolisztikus körülményeket fogunk vizsgálni, megállapításainkat ezt szem előtt tartva kell értékelnünk. Megjegyezzük, hogy a vizsgált keresleti függvény egy adott fogyasztó összkeresletének a termékvariánsok egy lehetséges leosztását adja meg.

Feltételezzük, hogy a szereplők jól informáltak és ismerik a termékükkel szemben támasztott keresletet:

$$y_i = \sum_{j=1}^{N-M} x_{ij} = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j - \epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}p_i - \epsilon \sum_{k=1}^M b_{kj}p_k, \quad (4)$$

vagyis a termelők termékei iránti kereslet nemcsak az adott termelő, hanem elvben minden más termelő áraitól is függ. Termelési oldalról feltesszük, hogy az  $i$ -edik termelő pontosan  $y_i$  mennyiséget termel:

$$y_i(\mathbf{p}) = \alpha \ell_i, \quad (5)$$

ahol  $\alpha > 0$  a munka termelékenységi paramétere, ami az időegység alatt előállított termékmennyiséget mutatja meg;  $\ell_i \geq 0$  a munkaórák száma. Feltételezve még, hogy minden termelő egységesen  $\omega > 0$  órabért fizet, az  $i$ -edik termelő  $\pi_i(\mathbf{p}) = p_i y_i - \omega \ell_i$  nyereségfüggvénye átírható<sup>2</sup>:

$$\pi_i(\mathbf{p}) = p_i y_i - \frac{\omega y_i}{\alpha}, \quad (6)$$

ahol  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_M)^\top$  az árakat tartalmazó oszlopvektor (árvektor). A fenti forma kiemeli, hogy az egyes termelők profitja nemcsak saját, hanem minden más termelő árválasztásától is függ.

A fent leírtakat felhasználva egy tiszta stratégián alapuló játékot fogunk definiálni, megadva annak normálformáját. Ebben a játékban a játékosok  $\mathcal{I}$  halmazát a termelők alkotják, ezért  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, M\}$ . Az  $i$ -edik termelő stratégiahalmaza  $A_i = [0, \infty]$ , ami azt jelenti, hogy bármilyen nemnegatív árat megállapíthat. Az  $A_i$  elemeit az eddigieknek megfelelően  $p_i$  fogja jelölni. Következésképpen  $\mathbf{p} \in \times_{i=1}^M A_i$  egy stratégia- vagy akcióprofil ad meg. Bevezetjük továbbá az  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$  tiszta stratégiahalmazok alkotta halmazát. Az  $i$ -edik termelő kifizetőfüggvénye  $\pi_i$ , illetve  $\mathcal{P} = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_M\}$  ezek halmaza.

*2.1. Definíció.* Az eddigieket figyelembe véve, a szóban forgó játék normálformáján a

$$\mathcal{G} = \langle \mathcal{I}, \mathcal{A}, \mathcal{P} \rangle \quad (7)$$

struktúrát értjük.

Célunk a továbbiakban olyan  $\mathbf{p}$  árvektor létezésének és egyértelműségének igazolása, amelyre igaz, hogy

$$\pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) \geq \pi_i(p'_i, \mathbf{p}_{-i}), \quad (8)$$

ahol  $\mathbf{p}_{-i} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_M)^\top$ , illetve  $p'_i \in A_i$  a  $p_i$  egyensúlyi termékárral nem feltétlenül azonos termékár. Következésképpen egy *tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúlyt keresünk.*

<sup>2</sup>Megjegyezzük, hogy az említett speciális alakú termelési függvény azt eredményezi, hogy munkafelhasználás nélkül nem lehetséges termelni.

### 3. Az egyensúlyi árvektor egzisztenciájának és unicitásának igazolása (főbizonyítás)

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy az egyes szereplők milyen feltételek mellett képesek profit-maximalizáló árat meghatározni. Az egyensúlyi, tehát minden  $i$  termelő számára optimális árvektor meghatározásához az  $i$ -edik szereplőnek meg kell oldania a

$$\pi_i^{BR}(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \arg \max_{p_i \in A_i} \left\{ p_i y_i - \frac{\omega y_i}{\alpha} \right\}, i = 1, 2, \dots, M \quad (9)$$

feladatot. Ebben az összefüggésben  $p_i$  az egyetlen változó, a többi termelő termékára ( $\mathbf{p}_{-i}$ ) pedig a korábbi feltételezésünk szerint adott. Így  $\pi_i^{BR}$  az  $i$ -edik termelő legjobb-válasza (erre utal a jobb felső index)<sup>3</sup> a versenytársak ( $\mathbf{p}_{-i}$ ) árai mellett.

Az elsőrendű szükséges feltételt a következő egyenlet adja meg ( $i = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\begin{aligned} \partial_i \pi_i &= y_i + p_i \partial_i y_i - \frac{\omega}{\alpha} \partial_i y_i = 0 \\ \Downarrow \\ \partial_i \pi_i &= \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} \gamma_j + \epsilon \left[ \sum_{j=1}^{N-M} \sum_{k=1}^M b_{ij} b_{kj} p_k - p_i \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} - p_i \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} (1 - b_{ij}) \right] \\ &+ \frac{\epsilon \omega}{\alpha} \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} (1 - b_{ij}) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

ugyanis a korábbiakban bevezetett fogalmakból tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} y_i(\mathbf{p}) &= \sum_{j=1}^{N-M} x_{ij} = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} [\gamma_j - \epsilon (p_i - \bar{p}_j)] = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} \gamma_j - \epsilon p_i \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} \\ &+ \epsilon \sum_{j=1}^{N-M} \sum_{k=1}^M b_{ij} b_{kj} p_k \end{aligned} \quad (11)$$

$$\partial_i y_i = -\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} (1 - b_{ij}). \quad (12)$$

Ezt felhasználva ellenőrizhető, hogy az elsőrendű feltételrendszert tömörítő mátrixegyenlet:

$$\mathbf{B} \Gamma \mathbf{1}_{N-M} + \epsilon (\mathbf{B} \mathbf{B}^T - \tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{C}) \mathbf{p} + \frac{\epsilon \omega}{\alpha} \mathbf{C} \mathbf{1}_M = \mathbf{0}_M, \quad (13)$$

<sup>3</sup>Be fogjuk látni, hogy  $\pi_i^{BR}$  valóban az  $i$ -edik termelő legjobb válasza, vagyis az egyensúlyi árvektor egyben *tiszta stratégia melletti Nash-egyensúly* (lásd [15, 16]).

ahol  $\mathbf{\Gamma}$  diagonális mátrix, amely főátlójának  $i$ -edik eleme  $\gamma_i$ ;  $\tilde{\mathbf{B}}$  diagonális mátrix, amely főátlójának  $i$ -edik eleme  $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}$ ;  $\mathbf{C}$  diagonális mátrix, amely főátlójának  $i$ -edik eleme  $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})$ , illetve  $\mathbf{1}_{N-M}$ ,  $\mathbf{1}_M$  a megfelelő méretű, csupa 1-esből álló összegzővektor és  $\mathbf{0}_M$  a csupa 0-t tartalmazó megfelelő méretű oszlopvektor.

Ha  $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$  invertálható, akkor a  $\mathbf{p}$  árvektor egyértelműen meghatározott:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{Q}^{-1} \left( \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}\mathbf{1}_{N-M} + \frac{\epsilon\omega}{\alpha} \mathbf{C}\mathbf{1}_M \right). \quad (14)$$

Annak érdekében, hogy a probléma megoldásához közelebb jussunk, olyan feltételt igyekszünk meghatározni, amely teljesülése esetén az említett inverz létezik. Ennek során felhasználjuk, hogy amennyiben egy mátrix főátlóján álló minden elem abszolútértéke szigorúan nagyobb a főátlón kívüli sorelemek abszolútértékeinek összegénél (*diagonális dominancia*), akkor a mátrixnak van inverze<sup>4</sup>. Ha  $\mathbf{Q}$   $i$ -edik sorának  $k$ -adik eleme  $q_{ik}$ , akkor az előbbi verbálisan megfogalmazott állítás formálisan azt jelenti, hogy  $|q_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M |q_{ik}|$ . Az utóbbi feltétel a következő konkrét egyenlőtlenség teljesülését kívánja meg:

$$2 \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij}) > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj}. \quad (15)$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala átírható:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \sum_{j=1}^{N-M} \frac{a_{ij}}{d_j} \frac{a_{kj}}{d_j} = \sum_{j=1}^{N-M} \frac{a_{ij}}{d_j^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M a_{kj} = \sum_{j=1}^{N-M} \frac{a_{ij}(d_j - a_{ij})}{d_j^2} \\ &= \sum_{j=1}^{N-M} \frac{a_{ij}}{d_j} \left( 1 - \frac{a_{ij}}{d_j} \right) = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij}). \end{aligned} \quad (16)$$

Innen pedig adódik, hogy elegendő megkövetelnünk, hogy

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij}) > 0.^5 \quad (17)$$

Ez teljesül, ha tetszőleges  $i$  termelő esetén létezik olyan  $b_{ij}$  érték, amelyik 0-tól és 1-től különbözik. Tehát  $\mathbf{B}$ -nek olyannak kell lennie, hogy minden sorában kell legyen legalább egy 0-tól és 1-től különböző érték. Ekkor viszont biztosan lesz olyan  $j$  fogyasztó minden egyes  $i$  termelő esetén, amelyre teljesül, hogy  $d_j \geq 2$ .

<sup>4</sup>Utóbbi állítás *Gersgorin tételének* (lásd [12]) a következménye.

<sup>5</sup>Megjegyezzük, hogy az egyenlőtlenség bal oldala a  $\tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$  főátlójának  $i$ -edik eleme. Ez pedig azt jelenti, hogy  $\tilde{\mathbf{B}} \neq \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$ .

Ez pontosan akkor teljesül, ha minden termelő esetén létezik az adott termelővel kapcsolatban álló olyan fogyasztó, amely legalább kétféle terméket fogyaszt. A közgazdasági intuício az eredmény mögött az, hogy az (1) szerint, ha valamely fogyasztó csak egyetlen termelőtől vásárol, úgy nem értelmezhető az árérzékenysége: az ártól függetlenül konstans kereslettel jelentkezik az adott termelő irányába, így utóbbi számára irrelevánssá válik az árdöntés, hiszen a konstans mennyiséget tetszőleges áron képes értékesíteni. Másképpen a (17) feltétel úgy is értelmezhető, hogy a keresett árvektor pontosan akkor létezik egy általunk használt interakciós struktúrában, ha minden termelő a saját árdöntéséhez figyelembe tud venni legalább még egy termelői árat, hiszen a vele kapcsolatban álló fogyasztó(k) érzékelt árindexét feltételezésünk szerint ismeri. Megjegyezzük, hogy  $d_j \geq 2$  minden  $j$ -re teljesül, hiszen ezt már az alapmodell leírásakor feltettük.

Az iménti gondolatmenet azonban még nem kielégítő. Be kell látnunk ugyanis, hogy  $\mathbf{p}$  minden koordinátája nemnegatív. Ennek igazolásához tekintsük a

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_M - \kappa \mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{Q} = \frac{1}{\kappa} (\mathbf{I}_M - \mathbf{V}) \quad (18)$$

mátrixot, ahol  $0 < \kappa \leq 2/(N - M)$  konstans és  $\mathbf{I}_M$  az  $M \times M$ -es egység mátrixot jelöli.<sup>6</sup> Ha teljesül, hogy  $\|\mathbf{V}\|_\infty < 1$ , akkor  $\mathbf{Q}^{-1} = \kappa (\mathbf{I}_M - \mathbf{V})^{-1} = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}^n$  írható.<sup>7</sup> Emellett, ha még az is igaz, hogy a  $\mathbf{V}$  minden eleme nemnegatív, akkor  $\mathbf{Q}^{-1}$  elemei biztosan nemnegatívak, tehát  $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}_M$  (sőt  $\mathbf{p} > \mathbf{0}_M$ , mert  $\mathbf{Q}^{-1}$ -nek nem lehet csupa 0 sora).

Első lépésben vizsgáljuk  $\mathbf{V}$  főátlóbeli elemeinek abszolútértékét és egy adott főátlóbeli elemmel azonos sorban álló diagonálison kívüli elemek abszolútértékeinek összegét. A mátrix  $i$ -edik főátlóbeli elemének abszolútértékére igaz, hogy

$$\left| \kappa \left[ \sum_{j=1}^{N-M} b_{i,j}^2 + \sum_{j=1}^{N-M} b_{i,j} (b_{i,j} - 1) - \sum_{j=1}^{N-M} b_{i,j} \right] + 1 \right| \leq 1 - 2\kappa \sum_{j=1}^{N-M} b_{i,j} (1 - b_{i,j}), \quad (19)$$

mivel  $-1/4 \leq b_{i,j} (b_{i,j} - 1) \leq 0$  minden  $i$ -re. A főátlón kívüli elemek abszolútértékeinek összegére teljesül, hogy

$$\kappa \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \sum_{j=1}^{N-M} b_{i,j} b_{k,j} = \kappa \sum_{j=1}^{N-M} b_{i,j} (1 - b_{i,j}). \quad (20)$$

Mindebből pedig már megkapjuk, hogy  $\|\mathbf{V}\|_\infty < 1$ , továbbá megfelelő  $\kappa$  választása mellett az is teljesül, hogy  $\mathbf{V}$  elemei nemnegatívak, sőt legalább a főátlóbeli

<sup>6</sup>Látható, hogy  $\mathbf{V}$  függ  $\kappa$  értékétől, azaz eltérő  $\kappa$  eltérő  $\mathbf{V}$ -t eredményez. Ezt azonban a jelölés szintjén nem hangsúlyozzuk.

<sup>7</sup>Az imént megfogalmazott állítás annak a következménye, hogy ha  $\mathbf{V}$  sajátértékei a komplex egységkörön belül vannak, akkor a szóban forgó felírás létezik. Mivel pedig  $\rho(\mathbf{V}) \leq \|\mathbf{V}\|_\infty$ , ahol  $\rho(\mathbf{V})$  a  $\mathbf{V}$  mátrix spektrálsugara, így, ha  $\|\mathbf{V}\|_\infty < 1$ , akkor ez már garantálja a fenti végtelen sor konvergenciáját.

elemei pozitívak. Ezzel beláttuk, hogy az egyensúlyi árvektor koordinátái nemnegatívak, sőt egyetlen koordinátája sem 0.<sup>8</sup>

Az eddigieket foglaljuk össze a következő tételben:

**3.1. TÉTEL.** *Ha minden termelővel kapcsolatban áll (tőle vásárol) legalább egy olyan fogyasztó, amely legalább egy másik termékvariánst is fogyaszt, akkor a (9) problémának létezik megoldása. A bizonyítás szerkezetéből látható, hogy egyetlen megoldás adódik.*

**3.1. Megjegyzés.** A tétel feltétele automatikusan teljesülni fog, hiszen előzőleg feltettük, hogy  $d_j \geq 2$  minden  $j$ -re.

**3.2. TÉTEL.** *A kapott árvektor valóban tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly, azaz (10) megoldása egyben megoldása a (9) feladatnak is.*

*Bizonyítás.* Ennek igazolása a  $\partial_i^2 \pi_i$  másodrendű (parciális) derivált vizsgálatára korlátozható minden egyes  $i$  termelőre nézve. Ha ez minden  $i$ -re negatív, akkor a  $p_i$  termékár megoldása a (9) feladatnak. Az említett deriválást elvégezve, minden  $i$ -re adódik, hogy  $\partial_i^2 \pi_i = -2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})$ . Ez viszont negatív, hiszen  $d_j \geq 2$  minden  $j$ -re.  $\square$

#### 4. Első részbizonyítás

Ebben a szakaszban egy olyan gondolatmenetet mutatunk be  $\mathbf{Q}^{-1}$  létezésére és nemnegativitására vonatkozóan, amelyik a *Perron–Frobenius tételeket* használja fel (lásd [22], [23]).

*Bizonyítás.* Korábbi levezetéseink miatt tudjuk, hogy a  $\mathbf{Q}\mathbf{1}_M$  vektor összes koordinátája pozitív, valamint az  $i$ -edik helyen álló elem  $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})$ . Ebből persze az is következik, hogy  $\|\mathbf{Q}\|_\infty > 0$ . Ezután írjuk át a  $\mathbf{Q}$  mátrixot  $\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - (\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q})$  alakúra. Ebből pedig már következik, hogy

$$\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{1}_M > (\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}) \mathbf{1}_M \geq \mathbf{0}_M, \quad (21)$$

sőt az első egyenlőtlenség jobb oldalán álló vektor adott koordinátája biztosan szigorúan kisebb a bal oldalon álló vektor megfelelő koordinátájánál. A  $\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}$  mátrix legnagyobb sajátértékét  $\rho(\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q})$ -val jelölve, biztosan teljesülni fog a

$$\|\mathbf{Q}\|_\infty \geq \rho(\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}) \quad (22)$$

<sup>8</sup>A  $\mathbf{Q}^{-1}$  elemeinek nemnegativitása más módon is belátható. A *binomiális invertálás tétele* (lásd [21]) szerint:  $(\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{B}^\top)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [(\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}^\top]^n (\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C})^{-1}$ . Mivel  $\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}$  inverze az a diagonális mátrix, amelynek  $i$ -edik főátlóbeli eleme a  $\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}$  diagonálisban álló  $i$ -edik elemének az inverze, így az iménti végtelen összeg minden tagja olyan mátrix, amelynek nemnegatív elemei vannak.



egyenlőtlenség. Mivel azonban biztosan van olyan  $K \in (0, 1)$  valós szám, hogy

$$K\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{1}_M > (\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}) \mathbf{1}_M, \quad (23)$$

ezért megállapítható, hogy

$$\|\mathbf{Q}\|_\infty > \rho(\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}). \quad (24)$$

Mindebből következik, hogy  $\mathbf{Q}^{-1}$  létezik és elemei nemnegatívak.  $\square$

## 5. Második részbizonyítás

Ebben a szakaszban a *Banach-féle fixponttételre* (lásd [4]) alapozva mutatunk egy figyelemre méltó részbizonyítást a (10) egyenletek alkotta egyenletrendszer megoldhatóságára és a megoldás egyértelműségére.

*Bizonyítás.* Első lépésben fejezzük ki  $p_i$ -t a (10) egyenlet alapján az alábbi módon ( $i = 1, 2, \dots, M$ ):

$$p_i = \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} \gamma_j}{2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} (1 - b_{ij})} + \frac{\sum_{j=1}^{N-M} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M b_{ij} b_{kj} p_k}{2 \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} (1 - b_{ij})} + \frac{\omega}{2\alpha}}_{F_i(\mathbf{p})}. \quad (25)$$

A leírtakból következik, hogy a

$$p_i = F_i(\mathbf{p}), i = 1, 2, \dots, M \quad (26)$$

fixpontprobléma megoldása pontosan (10) egyenletrendszer megoldását adja.

Néhány ténymegállapítással folytatjuk. Mivel a (16) gondolatmenet alapján láttuk, hogy  $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} (1 - b_{ij}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} b_{kj}$  igaz, ezért egy átosztás után teljesül, hogy

$$\frac{\sum_{j=1}^{N-M} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M b_{ij} b_{kj}}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} (1 - b_{ij})} = \sum_{j=1}^{N-M} w_{ij} = 1 \quad (27)$$

és  $w_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M b_{ij} b_{kj} / \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} (1 - b_{ij})$  ( $i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N - M$ ).

Most nézzük a következő becslést, ahol  $\hat{\mathbf{p}}$  egy  $\mathbf{p}$ -vel nem feltétlenül megegyező nemnegatív árvektor:

$$\begin{aligned} |F_i(\mathbf{p}) - F_i(\hat{\mathbf{p}})| &= \frac{1}{2} \left| \frac{\sum_{j=1}^{N-M} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M b_{ij} b_{kj} (p_k - \hat{p}_k)}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} (1 - b_{ij})} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \max_k |p_k - \hat{p}_k| \sum_{j=1}^{N-M} w_{ij} = \frac{1}{2} \max_k |p_k - \hat{p}_k|. \end{aligned} \quad (28)$$

Mivel az egyenlőtlenséget minden  $F_i$  teljesíti adott  $\mathbf{p}$  és  $\hat{\mathbf{p}}$  mellett, így

$$\max_i |F_i(\mathbf{p}) - F_i(\hat{\mathbf{p}})| \leq \frac{1}{2} \max_k |p_k - \hat{p}_k|. \quad (29)$$

Ha pedig  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_M)^\top$ , akkor a

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{p}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}})\|_\infty \leq q \|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}\|_\infty \quad (30)$$

kontrakció teljesül  $q = 1/2$  kontrakciós konstanssal. Mivel  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{X}_{i=1}^M A_i$  halmazból önmagába képez, ezért a Banach-féle fixponttétel miatt pontosan egy nemnegatív árvektor adódik.<sup>9</sup>  $\square$

## 6. Harmadik részbizonyítás

Ebben a szakaszban [19] és [20] eredményeit alkalmazva mutatunk egy további részbizonyítást a keresett Nash-egyensúly létezésére és egyértelműségére.

*Bizonyítás.* A  $\mathbf{p}$  árvektor a (8) értelmében pontosan akkor tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly, ha eleget tesz a

$$-\mathbf{G}(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \geq 0 \quad (31)$$

variációs egyenlőtlenségnek a  $\mathbf{X}_{i=1}^M A_i$  halmazon, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{G} : \mathbf{X}_{i=1}^M A_i &\rightarrow \mathbf{X}_{i=1}^M A_i, \mathbf{p} \mapsto (\mathbf{G}_1(\mathbf{p}), \mathbf{G}_2(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{G}_M(\mathbf{p})) \\ G_i &= \partial_i \pi_i, i = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (32)$$

valamint  $\mathbf{p}' \in \mathbf{X}_{i=1}^M A_i$  tetszőleges árvektor.

Az  $A_i$  nemüres, zárt és konvex minden  $i$ -re, így a  $\mathbf{X}_{i=1}^M A_i$  halmazra is ugyanez igaz. Korábban azt is láttuk, hogy  $\pi_i$  konkáv  $p_i$ -ben minden  $i$ -re, ezért [13] alapján pszeudokonkáv is. Mindez biztosítja az iménti variációs egyenlőtlenség teljesülését a  $\mathbf{X}_{i=1}^M A_i$  halmazon.

Ezenkívül, ha  $\mathbf{G}$  szigorúan monoton, akkor egyetlen egyensúlyi árvektor van. Legyen  $\hat{\mathbf{p}} > \mathbf{p}$  egy újabb egyensúlyi árvektor. Ekkor

$$-\mathbf{G}(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) \geq 0 \quad (33a)$$

$$-\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}})(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \geq 0. \quad (33b)$$

<sup>9</sup>Megjegyezzük, hogy a Banach-féle fixponttétel egy további lényeges következménye, hogy a rendszert tetszőleges  $\mathbf{p}_0 \geq 0$  kezdőpontból indítva a  $\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{p}_n)$  iteráció az egyensúlyi árvektorhoz konvergál. Ez rámutat arra, hogy amennyiben az árakat valamilyen sokkhatás ki-mozdítja az egyensúlynak megfelelő helyzetből, a termelők racionális profitmaximalizáló döntései nyomán oda visszatér akkor is, ha az ármeghatározás nem szimultán, hanem az egyes termelők a versenytársak árait megfigyelve és azokat adottnak véve fokozatosan módosítják árait a profitfüggvényük alapján.

Az egyenlőtlenségeket összeadva

$$(\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}) - \mathbf{G}(\mathbf{p}))(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) \geq 0. \quad (34)$$

Ez az egyenlőtlenség nem teljesül a szigorú monotonitás miatt, így  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$ .

Egyszerűen igazolható, hogy ha  $p_i'' > p_i'$ , akkor

$$x_{ij}(p_i'') - x_{ij}(p_i') = -\epsilon b_{ij}(1 - b_{ij})(p_i'' - p_i') < 0, \quad (35)$$

teljesül, illetve ezentúl

$$\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})(p_i'' - p_i') > 0 \quad (36)$$

is igaz. Innen azonnal kapjuk, hogy a

$$\partial_i \pi_i(p_i') - \partial_i \pi_i(p_i'') = 2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})(p_i'' - p_i') > 0 \quad (37)$$

megváltozás pozitív. Ezzel beláttuk  $\mathbf{G}$  szigorú monotonitását, ami tehát az unicitás elégséges feltétele.  $\square$

## 7. Összegzés

Ebben a dolgozatban egy olyan piaci modellt vázoltunk fel, amelyben a termelők és a fogyasztókat exogén hálózati struktúra kapcsolja össze. Amennyiben nem teljes, ez a hálózat korlátozza az eladó-vevő interakciókat és ezáltal az árinformációk terjedését/rendelkezésre állását. Fő kérdésünk az volt, hogy az adott lineáris keresleti és termelési függvények mellett, oligopolisztikus versenykörülmenyek közepette és – adott esetben – korlátozott informáltság mellett létezik-e egyensúlyi árvektor, méghozzá tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly értelmében. Kérdésünket tehát alapvetően egy nemkooperatív játékelméleti kontextusban vetettük fel.

A legfontosabb eredményünk alapján egy jól meghatározott feltételrendszer (megfelelő keresleti függvény, termelési függvény stb.) mellett tetszőleges, közgazdasági szempontból releváns hálózati szerkezet esetén egyértelműen létezik egyensúlyi árvektor. Az egyensúlyi árvektor létezésére és egyértelműségére egy (fő)bizonyítást adtunk, majd a további részbizonyításokban ennek egyes részleteit láttuk be (újra) más-más módszertani eszközökkel. A (fő)bizonyítás során első sorban a Gersgorin-tételre, a másodikban részbizonyításban a Perron–Frobenius-tételre, a harmadikban részbizonyításban a Banach-féle fixponttételre, míg az

utolsó részbizonyításban a variációs egyenlőtlenségek témakörének eredményeire építettünk. Hangsúlyozzuk, hogy az általunk vizsgált feltételrendszer, illetve alapprobléma a releváns szakirodalomhoz képest új kontextust jelent: a piac két oldalát expliciten megjelenítő és korlátozott eladó-vevő kapcsolttságot feltételező modellben az ármeghatározás kérdéseit eddig nem vizsgálták. Ezenkívül a fő- és az egyes részbizonyítások során bemutatott módszerek sem feltétlenül dominálnak a szóban forgó kérdéskörrel foglalkozó munkákban, így ez is újdonságnak tekinthető.

További kutatások tárgya lehet a piaci szereplőket összekapcsoló hálózat szerkezete és az egyensúlyi árvektor egyes tulajdonságai közötti kapcsolat feltárása.

### Köszönetnyilvánítás

A kutatást az Innovációs és Technológiai Minisztérium Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Programja finanszírozta, a Pécsi Tudományegyetem 4. tématerületi programja keretében. A szerzők ezúton szeretnék megköszönni a bírálók körültekintő és építő jellegű észrevételeit, amely a tanulmány színvonalának javításához nagyban hozzájárult.

### Hivatkozások

- [1] D. ACEMOGLU, V. M. CARVALHO, A. OZDAGLAR AND A. TAHBAZ-SALEHI: *The Network Origins of Aggregate Fluctuations*, *Econometrica*, Vol. **80**, pp. 1977-2016 (2012). DOI: [10.3982/ECTA9623](https://doi.org/10.3982/ECTA9623)
- [2] M. AOYAGI: *Bertrand competition under network externalities*, *Journal of Economic Theory*, Vol. **178**, pp. 517-550 (2018). DOI: [10.1016/j.jet.2018.10.006](https://doi.org/10.1016/j.jet.2018.10.006)
- [3] C. BALLESTER, A. CALVÓ-ARMENGOL AND Y. ZENOU: *Who's Who in Networks. Wanted: The Key Player*, *Econometrica*, Vol. **74**, pp. 1403-1417 (2006). DOI: [10.1111/j.1468-0262.2006.00709.x](https://doi.org/10.1111/j.1468-0262.2006.00709.x)
- [4] S. BANACH: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. **3**, pp. 133-181 (1922). DOI: [10.4064/fm-3-1-133-181](https://doi.org/10.4064/fm-3-1-133-181)
- [5] M. BELHAJ, Y. BRAMOULLÉ AND F. DEROÏAN: *Network games under strategic complementarities*, *Games and Economic Behavior*, Vol. **88**, pp. 310-319 (2014). DOI: [10.1016/j.geb.2014.10.009](https://doi.org/10.1016/j.geb.2014.10.009)
- [6] F. BLOCH, AND N. QUÉROU: *Pricing in social networks*, *Games and Economic Behavior*, Vol. **80**, pp. 243-261 (2013). DOI: [10.1016/j.geb.2013.03.006](https://doi.org/10.1016/j.geb.2013.03.006)
- [7] P. BONACICH: *Power and Centrality: A Family of Measures*, *American Journal of Sociology*, Vol. **92**, pp. 1170-1182 (1987). DOI: [10.1086/228631](https://doi.org/10.1086/228631)
- [8] Y. BRAMOULLÉ AND R. KRANTON: M. D'AMOURS, *Strategic Interaction and Networks*, *American Economic Review*, Vol. **104**, pp. 898-930 (2014). DOI: [10.1257/aer.104.3.898](https://doi.org/10.1257/aer.104.3.898)

- [9] A. CALVÓ-ARMENGOL, E. PATACHINI AND Y. ZENOU: *Peer Effects and Social Networks in Education*, The Review of Economic Studies, Vol. **76**, pp. 1239-1267 (2009). DOI: [10.1111/j.1467-937X.2009.00550.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-937X.2009.00550.x)
- [10] Y.-J. CHEN, Y. ZENOU AND J. ZHOU: *Competitive pricing strategies in social networks*, The RAND Journal of Economics, Vol. **49**, pp. 672-705 (2018). DOI: [10.1111/1756-2171.12249](https://doi.org/10.1111/1756-2171.12249)
- [11] J. DE MARTÍ AND Y. ZENOU: *Network games with incomplete information*, Journal of Mathematical Economics, Vol. **61**, pp. 221-240 (2015). DOI: [10.1016/j.jmateco.2015.10.002](https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2015.10.002)
- [12] S. GERSCHGORIN: *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Izvestija Akademii Nauk SSSR, Serija Matematika, Vol. **7**, pp. 749-754 (1931).
- [13] O. MANGASARIAN: *Pseudo-Convex Functions*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control, Vol. **3**, pp. 281-290 (1965). DOI: [10.1137/0303020](https://doi.org/10.1137/0303020)
- [14] J. F. NASH: *Equilibrium Points in  $n$ -Person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. **36**, pp. 48-49 (1950). DOI: [10.1073/pnas.36.1.48](https://doi.org/10.1073/pnas.36.1.48)
- [15] J. NASH: *Non-Cooperative Games*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. **54**, pp. 286-295 (1951). DOI: [10.2307/1969529](https://doi.org/10.2307/1969529)
- [16] P. USHCHEV AND Y. ZENOU: *Price competition in product variety networks*, Games and Economic Behavior, Vol. **110**, pp. 226-247 (2018). DOI: [10.1016/j.geb.2018.04.002](https://doi.org/10.1016/j.geb.2018.04.002)
- [17] D. ACEMOGLU, A. OZDAGLAR AND A. TAHBAZ-SALEHI: *Networks, Shocks, and Systemic Risk*, in: Y. Bramoulle, A. Galeotti, B. Rogers (eds.), The Oxford Handbook of Economics and Networks, Ch. 21. Oxford University Press, New York, NY, pp. 569-607 (2016). DOI: [10.1093/oxfordhb/9780199948277.013.17](https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199948277.013.17)
- [18] O. CANDOGAN, K. BIMPIKIS AND A. OZDAGLAR: *Optimal Pricing in the Presence of Local Network Effects*, in: A. Saberi (ed.), Internet and Network Economics, 6th International Workshop, WINE 2010, Stanford, CA, USA, December 13-17, 2010, Proceedings, Vol. **6484**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 118-132 (2010). DOI: [10.1007/978-3-642-17572-5\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17572-5_10)
- [19] D. GABAY AND H. MOULIN: *On the uniqueness and stability of Nash-equilibria in noncooperative games*, in: A. Bensoussan, P. Kleindorfer, C. S. Tapiero (eds.), Applied Stochastic Control of Econometrics and Management Science, Ch. 9. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, NE, pp. 271-293 (1980).
- [20] A. NAGURNEY: *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, revised 2nd ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, MA (1999). DOI: [10.1007/978-1-4757-3005-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3005-0)
- [21] S. J. PRESS: *Applied Multivariate Analysis: Using Bayesian and Frequentist Methods of Inference*, 2nd ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY. (2005).
- [22] J. WOODS: *Mathematical economics: topics in multi-sectoral economics*, Prentice Hall Press, London, UK (1978).
- [23] E. ZALAI: *Matematikai közgazdaságtan II.: Többszektáros modellek és makrogazdasági elemzések*, 2. átdolgozott és bővített kiadás, Akadémiai Kiadó, Budapest (2012).



SZABÓ BALÁZS

Pécsi Tudományegyetem  
Közgazdaságtudományi Kar  
7622 Pécs, Rákóczi út 80.  
szabo.balazs@pte.hu

Szabó Balázs a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar Gazdálkodástani Doktori Iskolájának hallgatója, emellett az FIKP pályázat keretében a karon tudományos segédmunkatárs, valamint óraadó. Kutatási területe egyrészt a matematikai közgazdaságtan (többszereplős modellek, piacszerkezetek), másrészt a kvantitatív menedzsment (beszállítói hálózatok, árdinamika) területére esik. Az utóbbi témakörben társ szerzős publikációja jelent meg a Sigma matematikai közgazdaságtani folyóirat 2019/4. számában.



SEBESTYÉN TAMÁS

Pécsi Tudományegyetem  
Közgazdaságtudományi Kar  
7622 Pécs, Rákóczi út 80.  
sebestyent@ktk.pte.hu

Sebestyén Tamás a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának egyetemi docense. 2011-ben szerzett PhD fokozatot és 2017-ben habilitált a Pécsi Tudományegyetemen. Tagja a 2012-ben létrejött MTA-PTE Innováció és gazdasági növekedés kutatócsoportnak. Kutatási területe a gazdaságmodellezés, annak mainstream oldala mellett a határterületek, kifejezetten a hálózatelmélet és az ágens alapú modellezés standard közgazdasági modellekkel való összekapcsolása. Publikációi e területeken vezető hazai és nemzetközi folyóiratokban jelentek meg.

Közreműködője több hazai és nemzetközi, regionális gazdasági növekedési modell kialakítását célzó kutatási projektnek.

## PRICE EQUILIBRIUM UNDER OLIGOPOLISTIC CIRCUMSTANCES IN CASE OF IMPERFECT INFORMATION

BALÁZS SZABÓ, TAMÁS SEBESTYÉN

In our paper under oligopolistic circumstances we analysed what does incomplete connectivity, i.e. the imperfection of information imply on price formation. This approach is a novelty in comparison with some of the standard modelling frameworks, which assume complete connectivity and the exact knowledge of the aggregate price index. In our model connectivity is arbitrary, which leads to the distinctness of perceived price indices concerning each agent, moreover, the symmetry of the standard model is also violated. Supposing market clearing we prove that in case intuitive assumptions hold, there exists a nonnegative equilibrium price vector (pure strategy Nash equilibrium). In our work we put emphasis on the methodological side of the model, first and foremost our aim is to demonstrate existence and other supplementary proofs.

*Keywords:* oligopolistic competition, equilibrium price vector, diagonal dominance, Gershgorin's theorem, Perron–Frobenius theorems, Banach fixed point theorem, variational inequality.

*Mathematics Subject Classification* (2000): 91Axx, 91Bxx.

## ÁLTALÁNOSÍTOTT RELATÍV KONSZENZUS – ÉLES KONVERGENCIATÉTELEK

GERENCSÉR BALÁZS ÉS GERENCSÉR LÁSZLÓ

A dolgozat egy hálózatokon definiált relatív konszenzus (ratio consensus) probléma megoldására a [7] és [2] dolgozatokban kifejlesztett push-sum vagy súlyozott pletyka (weighted gossip) algoritmus lényeges általánosítására vonatkozó friss, éles konvergenciatételek rövid összefoglalása [4] alapján. Az általánosítás egy lényeges eleme, hogy a hálózati dinamikát nem-negatív mátrixok egy szigorúan stacionárius, ergodikus, szekvenciálisan primitív sorozata írja le. Következésképp megadjuk a push-sum algoritmus pontos konvergencia sebességét, csomagvesztést is megengedve, ld. [5].

### 1. Bevezetés

A dolgozat célja egy hálózatokon megfogalmazott számítási probléma, az ún. ratio consensus (adekvát magyar fordításban relatív konszenzus) probléma kapcsán kifejlesztett elosztott, aszinkron algoritmus (push-sum vagy weighted gossip), ld. [7], [2], és annak lényegi általánosítása konvergenciájával kapcsolatos éles eredmények rövid bemutatása, döntően a [4] dolgozat kiemelt eredményei alapján. A probléma röviden szemléltethető úgy, hogy egy irányított hálózat csúcsaiban elhelyezett  $w^i > 0$  mennyiségű és  $x^i/w^i$  koncentrációjú oldatot akarunk a hálózat által megengedett lokális interakciókkal összekeverni úgy, hogy határértékben minden csúcsban azonos,  $\sum_i x^i / \sum_i w^i$  koncentrációjú oldat legyen.

A relatív konszenzus problémájának technikai kerete egy kommunikációs gráf, amelyet egy  $G = (V, E)$  irányított gráf jelenít meg, amelynek minden csúcsában adott egy  $x^i$  és  $w^i \geq 0$  valós értékű számpár, amelyeket értékeknek és súlyoknak nevezünk, úgy, hogy nem lehet a súlyok mindegyike 0. A probléma ekkor a  $\sum_i x^i / \sum_i w^i$  hányados kiszámítása, minden csúcsban, csak a  $G = (V, E)$  által megengedett lokális interakciókat végezve, és pedig aszinkron módon.

A push-sum algoritmus eredeti, legegyszerűbb alakja: legyen a csúcsok száma  $|V| = p$ , és jelölje  $x = (x^1, \dots, x^p)^\top$  kezdeti értékek vektorát a 0 időpillanatban, a kezdeti súlyok vektora pedig legyen  $w = (w^1, \dots, w^p)^\top = (1, \dots, 1)^\top =: \mathbf{1}$ . Az  $n$  időpontban válasszunk ki véletlenszerűen, függetlenül, egyenletes eloszlás szerint egy  $f_n = (i, j) \in E$  irányított élt. Ennek végpontjaiban egyidejűleg újítjuk fel az



értékeket és a súlyokat a következő módon: a küldő fél,  $i$  kezdeményez egy tranzakciót, amelynek során a saját értékeinek és súlyainak azonos  $\alpha_{ji} := 1/2$ , hányadát elküldi a fogadó félnek,  $j$ -nek, aki ezeket saját értékéhez, ill. súlyához hozzáadja, vagy másképp szólva, a megosztott oldatot saját oldatához keveri. Az algoritmus általánosabb alakjában a kezdeti súlyokra csak a  $w \geq 0, w \neq 0$  feltevéssel élünk, az élek kiválasztása függetlenül, de él-specifikus valószínűséggel történik, továbbá egy tranzakció során a megosztási hányad tetszőleges  $0 < \alpha_{ji} < 1$  lehet.

A push-sum algoritmus két szép alkalmazása egy nagy (irányítatlan) hálózat szomszédsági mátrixának elosztott spektrál-analízise [8], ill. egy hálózatokon definiált szeparálható konvex optimalizálási probléma elosztott megoldása [14]. A push-sum fenti algoritmus véletlen csomagvesztéseket is megengedő általánosítását elsőként az [5] dolgozat vizsgálta.

A push-sum algoritmus által definiált hálózati dinamika az alábbi módon írható le. Jelöljük  $x_{n-1}$  és  $w_{n-1}$  az  $n-1$  időpontbeli érték-, ill. súlyvektorokat. Ekkor

$$x_n = A_n x_{n-1}, \quad w_n = A_n w_{n-1} \quad n \geq 1, \quad (1)$$

ahol  $A_n$  egy  $p \times p$ -es független, azonos eloszlás szerint választott véletlen, oszlop-stochasztikus mátrix. Csomagvesztés esetén az oszlopösszeg legfeljebb 1. A push-sum algoritmus egy természetes kiterjesztését kapjuk, ha  $A_n$  értékészlete  $p \times p$ -es nem-negatív, véletlen mátrixok egy tetszőleges  $\mathcal{A}$  halmaza lehet. Egy további kiterjesztést kapunk, ha az interakcióban részt vevő, egymást követő párokat egy észszerűnek tűnő, jó keveredést ígérő terv szerint választjuk. Így a következő általános problémát fogalmazhatjuk meg. Tekintsük  $p \times p$ -es nem-negatív, véletlen mátrixok egy szigorúan stacionárius, ergodikus  $(A_n), n \geq 1$  sorozatát. Legyenek az  $x, w \in \mathbb{R}^p$  a kezdeti értékek, ill. súlyok vektorai úgy, hogy  $w \geq 0, w \neq 0$ . Jelölje  $e_i$  azt az egységvektort, amelynek  $i$ -dik koordinátája 1. Célunk az

$$e_i^\top A_n A_{n-1} \cdots A_1 x / e_i^\top A_n A_{n-1} \cdots A_1 w, \quad i = 1, \dots, p \quad (2)$$

hányadosok (koncentrációk) aszimptotikus viselkedésének a tanulmányozása.

A dolgozat felépítése: elsőként röviden bemutatjuk a felhasznált matematikai segédeszközöket, nevezetesen a véletlen mátrixok szorzatára vonatkozó alapvető eredményeket, a Fürstenberg-Kesten tételt, [3], ill. az Oseledec tétel egyszerűsített alakját, [9], [12]. A következőkben bevezetjük a szekvenciálisan primitív nem-negatív mátrix folyamatok fogalmát, majd bemutatunk egy normalizált szorzatokra vonatkozó eredményt, az [1] dolgozat eredményének egy kiterjesztését. A dolgozat fő eredményeit a 5.1-5.3. Tételekben fogalmazzuk meg, amelyek éles felső korlátot adnak az általánosított push-sum algoritmus m.m. (majdnem mindenütt) értett exponenciális konvergenciájának a sebességére. Ezeknek a push-sum algoritmusra történő alkalmazását fogalmazza meg a 6.1. Tétel. A dolgozat kiegészíti és továbbfejleszti a [10] és [13] dolgozatokban közölt módszereket és eredményeket.

## 2. Technikai segédeszközök

2.1. ÁLLÍTÁS. (Fürstenberg és Kesten tétele) Legyen  $(A_n), n \geq 1$  véletlen,  $p \times p$ -es mátrixok egy szigorúan stacionárius, ergodikus folyamata egy  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  valószínűségi tér felett, amelyre teljesül a  $\mathbb{E} \log^+ \|A_1\| < \infty$  feltétel. Ekkor a

$$\lambda_1 = \lim_n \frac{1}{n} \log \|A_n A_{n-1} \cdots A_1\| < \infty \quad \text{m.m.} \quad (3)$$

limesz létezik, és egyenlő az alábbiakkal:

$$\lim_n \frac{1}{n} \mathbb{E} \log \|A_n A_{n-1} \cdots A_1\| = \inf_n \frac{1}{n} \mathbb{E} \log \|A_n A_{n-1} \cdots A_1\|. \quad (4)$$

Megjegyezzük, hogy  $\lambda_1 = -\infty$  érték is megengedett. Az  $A_n A_{n-1} \cdots A_1$  szorzat egy finomabb karakterizációját adja Oseledec tétele, [9]. Ennek megfogalmazásához egy rövid kitérőt kell tennünk a Ljapunov exponensek világába, ld. [6]. Legyen  $(A_n), n \geq 1$   $p \times p$ -es mátrixok egy fix sorozata. Tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^p$ -re definiáljuk az  $x$  vektornak az  $(A_n)$  sorozatra vonatkozó  $\lambda(x)$  Ljapunov exponensét az alábbiak szerint:

$$\lambda(x) := \limsup_n \frac{1}{n} \log |A_n A_{n-1} \cdots A_1 x|.$$

Tekintsük ezután tetszőleges kiterjesztett értelemben vett  $-\infty \leq \mu \leq +\infty$  valós számra az alábbi halmazt:

$$L_\mu = \{x \in \mathbb{R}^p : \lambda(x) \leq \mu\}. \quad (5)$$

Könnyű látni, hogy  $L_\mu$  az  $\mathbb{R}^p$  vektortér lineáris altére, amelyre nyilvánvaló módon  $L_\mu \subset L_{\mu'}$  ha  $\mu \leq \mu'$ , továbbá  $L_\mu$  jobbról folytonos függvénye  $\mu$ -nek. Legyen  $\mu_1$  a legkisebb  $\mu$ , amelyre  $\mathbb{R}^p = L_\mu$ . A fentiek alapján létezik véges sok valós szám  $+\infty \geq \mu_1 > \dots > \mu_q \geq -\infty$ , amelyekre  $\mathbb{R}^p = L_{\mu_1} \supsetneq L_{\mu_2} \supsetneq \dots \supsetneq L_{\mu_q} \supsetneq \{0\}$ , úgy, hogy  $\mu_r > \mu \geq \mu_{r+1}$ ,  $r = 1, \dots, q-1$ , ill.  $\mu_q > \mu$ ,  $r = q$  esetén

$$L_\mu = L_{\mu_{r+1}}, \quad \text{ill.} \quad L_\mu = \{0\}. \quad (6)$$

Innen következik, hogy  $1 \leq r \leq q-1$ -re

$$x \in L_{\mu_r} \setminus L_{\mu_{r+1}} \text{-re} \quad \lambda(x) = \mu_r, \quad (7)$$

és persze  $x \in L_{\mu_q}$  esetén  $\lambda(x) = \mu_q$ . Legyen az  $L_{\mu_r}$  dimenziója  $i_r$ ,  $1 \leq r \leq q$ , így tehát  $p = i_1 > i_2 > \dots > i_q > 0$ , és legyen  $i_{q+1} = 0$ . Definiáljuk a Ljapunov exponensek teljes  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$  spektrumát az alábbi módon:

$$\lambda_i = \mu_r \quad \text{ahol} \quad i_r \geq i > i_{r+1}. \quad (8)$$

Ha már most  $(A_n) = (A_n(\omega))$  egy szigorúan stacionárius, ergodikus folyamat realizációja, akkor a fenti észrevétel nem-triviális kiterjesztésével a következő megragadóan szép eredményt kapjuk, amelyet (kissé bővebb alakban) először Oseledec

bizonyított a [9] dolgozatban, majd – gyengébb feltételek mellett – az eredményeket tovább pontosította a [12] dolgozat.

**2.2. ÁLLÍTÁS.** (Oseledc tétel) Legyen  $(A_n)$ ,  $n \geq 1$  a 2.1. Állítás szerinti  $p \times p$ -es mátrix-értékű sztochasztikus folyamat. Ekkor létezik az eseménytér egy 1 valószínűségű  $\Omega' \in \mathcal{F}$  halmaza úgy, hogy minden  $\omega \in \Omega'$ -re, és egyidejűleg minden  $x \in \mathbb{R}^p$ -re az alábbi limesz létezik:

$$\lambda(x) = \lim_n \frac{1}{n} \log |A_n A_{n-1} \cdots A_1 x| \quad \text{m.m.} \quad (9)$$

Továbbá, a  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ , Lyapunov exponensek, amelyek a  $-\infty$  értéket is felvehetik, és azok multiplicitásai, nem függenek  $\omega \in \Omega'$ -től.

A [12] dolgozatban közölt elemzésből következik, hogy az  $M_n$  szorzat

$$M_n = U_n \Sigma_n V_n, \quad (10)$$

szinguláris érték felbontására (SVD), ahol  $U_n, V_n$  ortonormális mátrixok és  $\Sigma_n$  diagonális a  $\sigma_n^1 \geq \sigma_n^2 \geq \dots \geq \sigma_n^p \geq 0$  diagonális elemekkel, teljesül az alábbi:

$$\lambda_k = \lim_n \frac{1}{n} \log \sigma_n^k \quad \text{m.m.} \quad k = 1, \dots, p. \quad (11)$$

Az Oseledc tétel állítja az alábbi határérték létezését is:

$$\lim_n (M_n^T M_n)^{1/2n} = \lim_n V_n^T \Sigma_n V_n \quad \text{m.m.} \quad (12)$$

A jelen cikkben arra a [12] dolgozat 5. Lemmájának bizonyításában impliciten szereplő kapcsolódó eredményre lesz szükségünk, hogy  $\lambda_1 > \lambda_2$  esetén a  $V_n$  mátrixok  $v_n^{1\cdot}$ -gyel jelölt első sorai m.m. konvergálnak valamilyen véletlen  $v^{1\cdot}$  határértékhez:

$$\lim v_n^{1\cdot} = v^{1\cdot} \quad \text{m.m.}, \quad (13)$$

sőt, a [12] dolgozat szerint,  $U_n$  első oszlopát  $u_n^{1\cdot}$ -gyel jelölve,

$$M_n = u_n^{1\cdot} v^{1\cdot} \sigma_n^1 + O(e^{(\lambda_2 + o(1))n}) \quad \text{m.m.} \quad (14)$$

### 3. Szekvenciálisan primitív nem-negatív mátrix folyamatok

Az elkövetkezőkben a nem-negatív mátrixokra vonatkozó primitívség fogalmának a kiterjesztésére lesz szükségünk. Egy szép bevezetés ebbe a témakörbe a [11] dolgozat. Emlékeztetőül, egy  $A$  nem-negatív mátrix primitív, ha egy elég magas pozitív egész hatványa, mondjuk  $A^n$  pozitív. Legyen most  $\mathcal{A}$  nem-negatív,  $p \times p$ -es mátrixok egy tetszőleges családja. Kérdezhetjük, hogy van-e  $\mathcal{A}$ -beli mátrixoknak olyan szorzata (ismétlést is megengedve), amely szigorúan pozitív.

**3.1. Definíció.** Nem-negatív,  $p \times p$ -es mátrixok egy  $\mathcal{A}$  családja primitív, ha létezik  $\mathcal{A}$ -beli mátrixoknak legalább egy véges szorzata, amely szigorúan pozitív.

A fenti definíció természetes módon kiterjeszthető nem-negatív,  $p \times p$ -es véletlen mátrixok egy szigorúan stacionárius folyamatára. Előzetesen és emlékeztetőül: egy nem-negatív,  $p \times p$ -es mátrixot megengedettnak nevezünk, ha nincs azonosan nulla sora vagy oszlopa. Egy mátrix sor-megengedett, ha nincs azonosan nulla sora.

**3.2. Definíció.** Nem-negatív, megengedett  $p \times p$ -es véletlen mátrixok egy szigorúan stacionárius  $(A_n), n \geq 1$  folyamata szekvenciálisan primitív, ha az  $M_\tau := A_\tau A_{\tau-1} \cdots A_1$  szorzat szigorúan pozitív 1 valószínűséggel valamilyen véges  $\tau$  megállási idővel. Tetszőleges  $n \geq 1$ -re definiáljuk a szekvenciális primitivitási indexet:

$$\psi_n = \min\{\psi \geq 1 : A_{n+\psi-1} A_{n+\psi-2} \cdots A_n > 0\}. \quad (15)$$

Mivel a definícióban megengedett  $A_n$  mátrixokra szorítkoztunk, ezek egyben sor-megengedettek is, és ezért  $M_n > 0$  szigorú értelemben minden  $n \geq \psi_1$ -re.

**3.1. LEMMA.** Legyen  $(A_n), n \geq 1$  nem-negatív, megengedett  $p \times p$ -es véletlen mátrixok egy azonos, független eloszlású sorozata. Ekkor  $(A_n)$  szekvenciálisan primitív akkor és csak akkor, ha az  $A_1$  véletlen mátrix  $\mathbb{R}^{p \times p}$ -n vett  $\mu$  eloszlásának az  $\mathcal{A} = \text{supp } \mu$  tartója primitív.

#### 4. Nem-negatív mátrixok és vektorok normalizált szorzata

A relatív konszenzus probléma vizsgálatának egy természetesen kínálkozó eszköze egy nem-negatív mátrixok és vektorok normalizált szorzatára vonatkozó eredmény, nevezetesen az [1] dolgozat 1. Tétele. Ennek önmagában is szép és érdekes közvetlen általánosítását alább ismertetjük. Legyen  $(A_n), n \geq 1$  nem-negatív, megengedett  $p \times p$ -es véletlen mátrixok egy szigorúan stacionárius, ergodikus folyamata. Legyenek  $x, w \in \mathbb{R}_+^p$ , azaz legyenek minden komponensükben nem-negatív vektorok,  $x, w \geq 0$ , és tegyük fel, hogy  $x, w \neq 0$ . Definiáljuk az alábbi szorzatokat:

$$x_n := M_n x = A_n A_{n-1} \cdots A_1 x, \quad (16)$$

$$w_n := M_n w = A_n A_{n-1} \cdots A_1 w. \quad (17)$$

Nyilvánvaló módon  $x_n, w_n$  nem-negatívak, és mivel  $A_n$  megengedett minden  $n$ -re és  $x, w \neq 0$ , következik, hogy  $x_n, w_n \neq 0$  minden  $n$ -re. Legyen  $\mathbf{1}$  az a  $p$ -vektor, amelynek minden koordinátája 1. Definiáljuk az alábbi normalizált szorzatokat:

$$\bar{x}_n = x_n / (\mathbf{1}^\top x_n), \quad \bar{w}_n = w_n / (\mathbf{1}^\top w_n), \quad (18)$$

valamint a köztük lévő távolságra a totális variáció normát:

$$\|\bar{x}_n - \bar{w}_n\|_{\text{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p |\bar{x}_n^i - \bar{w}_n^i|. \quad (19)$$

A következő tétel az [1] dolgozat (hiányos bizonyítású) 1. Tételének közvetlen általánosítása:

**4.1. TÉTEL.** *Legyen  $(A_n)$ ,  $n \geq 1$  véletlen mátrixok egy a 2.1. Tétel feltételeinek eleget tevő sorozata. Ezen túlmenően tegyük fel, hogy  $A_n$  minden  $n$ -re nem-negatív, megengedett, és hogy az  $(A_n)$  sorozat szekvenciálisan primitív. Ekkor minden  $(x, w) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^p$ ,  $x, w \neq 0$ , párra teljesül az alábbi:*

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \|\bar{x}_n - \bar{w}_n\|_{\text{TV}} \leq -(\lambda_1 - \lambda_2) \quad \text{m.m.}$$

Az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül Lebesgue m.m.  $(x, w) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^p$  párra. A jobboldal közismert megnevezése spektrális rés (spectral gap).

## 5. Általánosított relatív konszenzus

Az általánosított push-sum algoritmusra vonatkozó, konvergenciasebességet is megadó eredmények megfogalmazásában a 4.1. Tétel feltételei alkotnak egy közös keretrendszert, ezt fogjuk kiegészíteni az  $(A_n)$  sorozatra vonatkozó egyedi feltételekkel. Nevezetesen, az  $A_n$  mátrixok pozitív elemeire vonatkozóan fogunk további feltevésekkel élni. Definiáljuk az alábbiakat:

$$\alpha_n := \min_{ij} \{A_n^{ij} : A_n^{ij} > 0\}, \quad \beta_n := \max_{ij} A_n^{ij}. \quad (20)$$

Mivel  $\beta_n$  ekvivalens az  $\|A_n\|$  normával, következik, hogy  $\mathbb{E} \log^+ \beta_n < \infty$ . Ennek a feltételnek ikerpárja az alábbi  $\mathbb{E} \log^- \alpha_n > -\infty$  feltétel.

**5.1. TÉTEL.** *Teljesüljenek a 4.1. Tétel feltételei, és legyen az  $(A_n)$  sorozat független, azonos eloszlású. Tegyük fel, hogy  $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$ . Végül tegyük fel, hogy  $\mathbb{E} \log^- \alpha_n > -\infty$ . Legyen  $x \in \mathbb{R}^p$  kezdeti értékek egy tetszőleges vektora, és legyen  $w \in \mathbb{R}_+^p$ ,  $w \neq 0$  kezdeti súlyok egy vektora. Ekkor minden  $i = 1, \dots, p$ -re*

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \left| \frac{e_i^\top M_n x}{e_i^\top M_n w} - \frac{v^{1\cdot} x}{v^{1\cdot} w} \right| \leq -(\lambda_1 - \lambda_2) \quad \text{m.m.} \quad (21)$$

Verbálisan azt mondhatjuk, hogy – a tétel feltételei mellett – a rendszer relatív konszenzusra jut: minden  $i$  ágensre az  $x_n^i/w_n^i$  hányadosok konvergálnak ugyanahhoz a  $\pi^T x$  értékhez m.m., ahol a  $\pi$  véletlen vektorra  $\pi = v^{1\cdot}/v^{1\cdot} w$ . Az  $x_n^i/w_n^i$  hányados az  $i$ -dik csúcsban az  $n$ -dik lépés utáni koncentrációként is értelmezhető.

A fenti keretrendszer egy kiterjesztését motiválja egy olyan működésmód, amelyben az egymással kommunikáló párok kiválasztása egy időben homogén véletlen mintázatot követ, amely nem szükségképpen i.i.d., ld. például [2]. Ilymódon megengedjük, hogy  $(A_n)$  egy szigorúan stacionárius, ergodikus folyamat legyen. Ebben az esetben két alternatív kiegészítő feltételt fogalmaztunk meg a [4] dolgozatban, itt csak az első, egyszerűbb feltételt ismertetjük.

**5.2. TÉTEL.** *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 4.1. Tétel feltételei,  $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$ , és a  $\psi_1$  szekvenciális primitivitási indexre  $\mathbb{E}\psi_1 < \infty$  (és így  $\mathbb{E}\psi_n < \infty$  minden  $n$ -re). Tegyük fel továbbá, hogy az  $(A_n)$  sorozat alulról és felülről korlátos: léteznek olyan  $\alpha, \beta > 0$  számok, hogy  $\alpha_n \geq \alpha > 0$ ,  $\beta_n \leq \beta$  m.m. Ekkor tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^p$ , és  $w \in \mathbb{R}_+^p$ ,  $w \neq 0$  választás mellett a rendszer relatív konszenzusra jut és fennáll a (21) egyenlőtlenség.*

Abban a speciális esetben, amikor  $A_n$  oszlop-sztochasztikus minden  $n$ -re, ahogy ez fennáll a push-sum algoritmus eredeti formájában, maga az  $M_n$  szorzatmátrix is oszlop-sztochasztikus lesz minden  $n$ -re. Ebből könnyen következik, hogy  $\lambda_1 = 0$ . Az  $M_n$  szorzat (14) reprezentációja alapján könnyen megmutatható az is, hogy  $v^1$  skalár többszöröse a  $\mathbf{1}^\top$  vektornak. Ilymódon a következő eredményt kapjuk:

**5.3. TÉTEL.** *Tegyük fel, hogy teljesülnek az 5.1., ill. 5.2. Tételek feltételei, és  $A_n$  oszlop-sztochasztikus minden  $n$ -re. Ekkor tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^p$  kezdeti vektorra és tetszőleges  $w \in \mathbb{R}_+^p$ ,  $w \neq 0$  kezdeti súlyvektorra, minden  $i = 1, \dots, p$ -re*

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \left| \frac{e_i^\top M_n x}{e_i^\top M_n w} - \frac{\mathbf{1}^\top x}{\mathbf{1}^\top w} \right| \leq \lambda_2 < 0 \quad \text{m.m.}$$

Vegyük észre, a relatív konszenzus által létrejött határérték ebben az esetben determinisztikus, amely a  $\pi^\top x$  alakban is írható, ahol  $\pi = \mathbf{1}/\mathbf{1}^\top w$ . A  $w = \mathbf{1}$  választás esetén az 5.3. Tétel alapján átlag-konszenzus jön létre a klasszikus értelemben: minden  $i$  ágensre az  $x_n^i/w_n^i$  hányadosok konvergálnak az  $\bar{x} = \sum_{i=1}^p x_0^i/p$  határértékhez m.m., legalább a tételben adott sebességgel.

Megjegyezzük, hogy az 5.1. és 5.2. Tételekben adott felső korlátok élesek: baloldali hibatagok  $i$ -ben vett maximumának határértéke pontosan  $\lambda_1 - \lambda_2$ , ld. [4], 21. Tétel. Az 5.1. és 5.2. Tételek bizonyításainak kiindulópontja az  $M_n$  szorzat (14) alatt adott reprezentációja.

## 6. Specifikáció: a push-sum algoritmus csomagvesztéssel

A csomagvesztést is megengedő push-sum algoritmus vizsgálatára, ld. [5], az 5.1. Tétel alkalmazható:

**6.1. TÉTEL.** *Legyen  $(A_n)$  egy csomagvesztést is megengedő push-sum algoritmushoz társított mátrixok i.i.d. sorozata. Tegyük fel, hogy a  $(G, E)$  irányított*

kommunikációs gráf erősen összefüggő. Ekkor az  $(A_n)$  sorozat szekvenciálisan primitív, és  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Következésképpen, tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^p$  kezdeti vektorra és tetszőleges  $w \in \mathbb{R}_+^p$ ,  $w \neq 0$  kezdeti súlyvektorra, minden  $i = 1, \dots, p$ -re

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \left| \frac{e_i^\top M_n x}{e_i^\top M_n w} - \frac{v^1 \cdot x}{v^1 \cdot w} \right| \leq -(\lambda_1 - \lambda_2) \quad \text{m.m.}$$

Az  $(A_n)$  sorozat szekvenciális primitivitása a 3.1. Lemma alapján bizonyítható, amelynek feltétele a hálózat egy csúcsból történő elárasztásával verifikálható, ld. [5], a  $\lambda_1 > \lambda_2$  feltétel pedig a 4.1. Tétel alapján bizonyítható, felhasználva az [5] dolgozat exponenciális konvergenciasebességre vonatkozó eredményét (Thm 3).

A csomagvesztést is megengedő push-sum algoritmus esetén a relatív konszenzus által kapott  $\pi^T x$  érték véletlen, ahol  $\pi = v^1 / v^1 \cdot w$ , de bőséges kísérleti tapasztalat van arra vonatkozóan, hogy a csomagvesztés (ágensektől független) valószínűségének a csökkentésével  $\pi^T x$  fokozottan koncentráliódik, ld. [5]. Érdekes további kérdés annak vizsgálata, mi a kapcsolat a  $\lambda_1 - \lambda_2$  spektrális rés, és a hálózati dinamika paraméterei között.

### Köszönetnyilvánítás

Az első szerző köszönetét fejezi ki Julien M. Hendrickx-nek a konszenzus problémák témakörében folytatott tartós és inspiráló együttműködésért, továbbá Asuman Ozdaglar-nak a tárgyalt kérdéskörrel kapcsolatos észrevételeiért. Az ő kutatását támogatta az NKFIH PD 121107 sz. pályázata és az MTA Lendület LP 2015-6 sz. pályázata.

### Hivatkozások

- [1] R. ATAR AND O. ZEITOUNI: *Lyapunov exponents for finite state nonlinear filtering*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. **35**, pp. 36-55 (1997). DOI: [10.1137/S0363012994272046](https://doi.org/10.1137/S0363012994272046)
- [2] F. BÉNÉZIT, V. BLONDEL, P. THIRAN, J. TSITSIKLIS, AND M. VETTERLI: *Weighted gossip: Distributed averaging using non-doubly stochastic matrices*, in Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), pp. 1753-1757 (2010). DOI: [10.1109/ISIT.2010.5513273](https://doi.org/10.1109/ISIT.2010.5513273)
- [3] H. FURSTENBERG AND H. KESTEN, *Products of random matrices*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. **31**, pp. 457-469 (1960). DOI: [10.1214/aoms/1177705909](https://doi.org/10.1214/aoms/1177705909)
- [4] B. GERENCSÉR AND L. GERENCSÉR: *Tight bounds on the convergence rate of generalized ratio consensus algorithms*. URL: [arXiv:1901.11374](https://arxiv.org/abs/1901.11374), 2019.

- [5] B. GERENCSÉR AND J. M. HENDRICKX: *Push sum with transmission failures*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **64**, pp. 1019-1033 (2018). DOI: [10.1109/TAC.2018.2836861](https://doi.org/10.1109/TAC.2018.2836861)
- [6] R. JUNGERS: *The joint spectral radius: theory and applications*, Springer Science & Business Media, Vol. **385**, 2009. DOI: [10.1007/978-3-540-95980-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-95980-9)
- [7] D. KEMPE, A. DOBRA, AND J. GEHRKE: *Gossip-based computation of aggregate information*, in Proceedings of 44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 482-491 (2003). DOI: [10.1109/SFCS.2003.1238221](https://doi.org/10.1109/SFCS.2003.1238221)
- [8] D. KEMPE AND F. MCSHERRY: *A decentralized algorithm for spectral analysis*, Journal of Computer and System Sciences, Vol. **74**, pp. 70-83 (2008). DOI: [10.1016/j.jcss.2007.04.014](https://doi.org/10.1016/j.jcss.2007.04.014)
- [9] V. I. OSELEDEC: *A multiplicative ergodic theorem. Liapunov characteristic number for dynamical systems*, Transactions of the Moscow Mathematical Society, Vol. **19**, pp. 197-231 (1968).
- [10] G. PICCI AND T. J. TAYLOR: *Almost sure exponential convergence to consensus of random gossip algorithms*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. **23**, pp. 1033-1045 (2013). DOI: [10.1002/rnc.2844](https://doi.org/10.1002/rnc.2844)
- [11] V. Y. PROTASOV AND A. VOYNOV: *Sets of nonnegative matrices without positive products*, Linear Algebra and its Applications, Vol. **437**, pp. 749-765 (2012). DOI: [10.1016/j.laa.2012.02.029](https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.02.029)
- [12] M. S. RAGHUNATHAN: *A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem*, Israel Journal of Mathematics, Vol. **32**, pp. 356-362 (1979). DOI: [10.1007/BF0276046](https://doi.org/10.1007/BF0276046)
- [13] A. TAHBAZ-SALEHI AND A. JADBABAIE: *Consensus over ergodic stationary graph processes*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **55**, pp. 225-230 (2010). DOI: [10.1109/TAC.2009.2034054](https://doi.org/10.1109/TAC.2009.2034054)
- [14] K. I. TSIANOS, S. LAWLOR AND M. G. RABBAT: *Push-sum distributed dual averaging for convex optimization*, in Proceedings of 2012 IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC), pp. 5453-5458 (2012). DOI: [10.1109/CDC.2012.6426375](https://doi.org/10.1109/CDC.2012.6426375)





Gerencsér Balázs az ELTE TTK matematikus szakán végezte egyetemi tanulmányait, ahol 2007-ben egyetemi diplomát, majd 2013-ban PhD fokozatot szerzett. A 2009-2010-es tanévben az MIT vendégkutatója volt (Laboratory for Information and Decision Systems, röviden LIDS) Fulbright hallgatói ösztöndíj támogatásával. Doktori tanulmányai alatt az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet alkalmazta tudományos segédmunkatársként, majd fokozatszerzését követően posztdoktori állást kapott a belgumi Université catholique de Louvain-en, 2013-2015 között. 2015 óta az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben foly-

tatta munkáját posztdoktori ösztöndíjakkal (MTA, NKFIH). 2020-tól az Intézet tudományos főmunkatársa. Kutatómunkája mellett 2016 óta az ELTE Valószínűségelméleti és Statisztika tanszék adjunktusaként oktatói feladatokat is ellát. 2014-ben elnyerte a Bolyai János Matematikai Társulat Farkas Gyula Emlékdíját. Kutatási területei közé tartoznak: Markov láncok keverési tulajdonságai, Markov láncok véletlen környezetben, matematikai genetika, konszenzus problémák és alkalmazásaik, lokális algoritmusok.

#### GERENCSÉR BALÁZS

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet  
1053 Budapest, Reáltanoda utca 13-15.  
gerencser.balazs@renyi.hu



Gerencsér László egyetemi diplomáját az ELTE TTK matematikus szakán szerezte 1969-ben. 1970-től rövidebb-hosszabb megszakításokkal az (MTA) SZTAKI-ban dolgozik az operáció-kutatás, majd a rendszer- és irányításelmélet témaköreiben. 1988 és 1991 között vendég-professzor volt a kanadai McGill Egyetemen (Montreal, Quebec), 1997 és 2001 között pedig Széchenyi Professzori Ösztöndíjasként oktatott az ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszékén. Itt matematikus szakon az elsők között oktatott modern pénzügyi matematikát. Több éven át tanított a Pázmány Péter Katolikus Egyetem, Információs Technológiai és Bionikai Karán is.

Témavezetése mellett 8 tanítványa szerzett PhD fokozatot. Az MTA doktora címet 2000-ben kapta meg. Több cikluson át szerkesztőbizottsági tagja volt a SIAM Journal of Control and Optimization, ill. az IEEE Transactions on Automatic Control folyóiratok szerkesztőbizottságainak. Főbb kutatási területei: Sztochasztikus Rendszerek, Változás Detektálás, Pénzügyi Idősorok, Pontfolyamatok, Gépi Tanulás, Elosztott Számítási Modellek.

GERENCSÉR LÁSZLÓ

SZTAKI

1111 Budapest, Kende utca 13-17.

gerencser.laszlo@sztaki.hu

## GENERALIZED RATIO CONSENSUS – TIGHT BOUNDS ON CONVERGENCE RATE

BALÁZS GERENCSÉR, LÁSZLÓ GERENCSÉR

We present a brief summary of recent sharp results of [4] on the convergence of significant generalizations of the push-sum algorithm or weighted gossip algorithm, developed in [7] and [2] for the solution of a ratio consensus problem defined over a network. A key feature of our approach is that we allow a network dynamics to be described by a general strictly stationary, ergodic, sequentially primitive sequence of non-negative matrices. Implications for the exact convergence rate of the push-sum algorithm, including scenarios with packet loss, see [5], will be given.

*Keywords:* gossip algorithms, ratio consensus, multiplicative ergodic theorems.

## ÚJ KERESÉSI IRÁNYRA ÉPÜLŐ BELSŐPONTOS ALGORITMUS LINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁSRA

DARVAY ZSOLT, RIGÓ PETRA RENÁTA, SZÉNÁSI ESZTER

Egy új keresési irányra alapozott teljes Newton-lépéses belsőpontos algoritmust vezetünk be lineáris optimalizálási feladatok megoldására. Az eljárás során algebrailag ekvivalens átalakítás [2] segítségével változtatjuk meg a centrális utat megadó egyenletrendszert. Megmutatjuk, hogy a módszer polinomiális komplexitású. Ez az első lineáris optimalizálásra vonatkozó belsőpontos algoritmus, amely ezzel a speciális keresési iránnyal dolgozik.

### 1. Bevezetés

Az első belsőpontos algoritmust Karmarkar [4] vezette be 1984-ben lineáris optimalizálási feladatok megoldására. Roos, Terlaky, Vial [9], Wright [12] és Ye [13] összefoglalták a belsőpontos algoritmusok elméletére vonatkozó legfontosabb eredményeket.

A keresési irányok megválasztása fontos szerepet játszik ezeknek az algoritmusoknak az esetében. 2002-ben Darvay [2] bevezette a centrális út algebrailag ekvivalens átalakításának módszerét keresési irányok meghatározására. Egy folytonosan differenciálható és invertálható függvényt alkalmazott a centrális utat meghatározó rendszer centralizálási egyenletére. A szakirodalomban eddig az identikus függvényt, a gyökfüggvényt és a  $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$  függvényt használták [2, 3, 9]. Később, Kheirfam és Haghighi [5] a  $\varphi(t) = \frac{\sqrt{t}}{2(1+\sqrt{t})}$  függvényre épülő irányt használták lineáris komplementaritási feladatok megoldására vonatkozó belsőpontos algoritmus bevezetésére. Ebben a cikkben egy új belsőpontos algoritmust mutatunk be lineáris optimalizálási feladatok megoldására, amely a Kheirfam és Haghighi által bevezetett irányra épül. Igazoljuk a módszer polinomialitását is. Az algoritmusra vonatkozó elemzés a [8] tanulmányban van részletesen bemutatva.

### 2. A lineáris optimalizálási feladat

A primál feladat a következő:

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad (1)$$

ahol  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rang}(A) = m$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  és  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ . A duál feladatot az alábbi módon adhatjuk meg:

$$\max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}. \quad (2)$$

Az általánosság megsértése nélkül feltételezhetjük, hogy létezik egy olyan  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{s}^0)$  hármas, amelyre teljesül a belső pont feltétel:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}^0 &= \mathbf{b}, & \mathbf{x}^0 &> \mathbf{0}, \\ A^T \mathbf{y}^0 + \mathbf{s}^0 &= \mathbf{c}, & \mathbf{s}^0 &> \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Az önduális beágyazás technikáját [11, 14] felhasználva a csupa egyesekből álló  $n$ -dimenziós  $\mathbf{e}$  egységvektor tekinthető kezdeti pontnak. Ennek a technikának a lényege, hogy az eredeti feladatot beágyazza egy nagyobb dimenziójú, ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladatba oly módon, hogy az új önduális lineáris programozási feladatnak a csupa egyes vektor már szigorú belső pontja. A centrális utat meghatározó rendszer a következőképpen adható meg:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, & \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \\ A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} &= \mathbf{c}, & \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}\mathbf{s} &= \mu \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (4)$$

ahol  $\mu > 0$ . Feltételezve, hogy a (3) teljesül, fix  $\mu > 0$  esetén a (4) rendszernek egyértelmű megoldása van, amelyet  $\mu$ -centrumnak hívunk (Sonnevend [10]). Ha  $\mu$  tart nullához, a centrális út a feladat optimális megoldásához konvergál.

### 3. Algebrailag ekvivalens átalakítás módszere

Ebben a fejezetben bemutatjuk az algebrailag ekvivalens átalakítás módszerét [2]. Tekintsük a differenciálható és invertálható  $\varphi : (\xi, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, ahol  $\xi > 0$ . A  $(\xi, \infty)$  intervallumra azért van szükség, mivel egyes  $\varphi$  függvények esetében az értelmezési tartomány nem a  $(0, \infty)$  intervallum. Továbbá, használjuk az  $f(\mathbf{x}) = [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T$  jelölést. Ekkor a (4) rendszer az alábbi ekvivalens alakra transzformálható:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, & \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \\ A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} &= \mathbf{c}, & \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}, \\ \varphi\left(\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}\right) &= \varphi(\mathbf{e}). \end{aligned} \quad (5)$$

Erre a rendszerre alkalmazzuk a Newton módszert. Feltételezve, hogy (3) teljesül, néhány átalakítással az alábbi rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} A\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ A^T\Delta\mathbf{y} + \Delta\mathbf{s} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\mathbf{s}}{\mu}\varphi'\left(\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}\right)\Delta\mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}}{\mu}\varphi'\left(\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}\right)\Delta\mathbf{s} &= \varphi(\mathbf{e}) - \varphi\left(\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

A (6) rendszer utolsó egyenletét az alábbi alakra hozhatjuk:

$$\mathbf{s}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}\Delta\mathbf{s} = \mu \cdot \frac{\varphi(\mathbf{e}) - \varphi\left(\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}\right)}{\varphi'\left(\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}\right)}. \quad (7)$$

Bevezetjük az alábbi jelöléseket, amelyeket a skálázásnál fogunk használni:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}}, \quad \mathbf{d}_\mathbf{x} = \frac{\mathbf{v}\Delta\mathbf{x}}{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{d}_\mathbf{s} = \frac{\mathbf{v}\Delta\mathbf{s}}{\mathbf{s}}. \quad (8)$$

Tekintsük továbbá az  $\bar{A} = \frac{1}{\mu}A \cdot \text{diag}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{v}}\right)$  jelölést. Ekkor az alábbi skálázott rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \bar{A}\mathbf{d}_\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ \bar{A}^T\Delta\mathbf{y} + \mathbf{d}_\mathbf{s} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{d}_\mathbf{x} + \mathbf{d}_\mathbf{s} &= \mathbf{p}_\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (9)$$

ahol

$$\mathbf{p}_\mathbf{v} = \frac{\varphi(\mathbf{e}) - \varphi(\mathbf{v}^2)}{\mathbf{v}\varphi'(\mathbf{v}^2)}. \quad (10)$$

Látható, hogy különböző  $\varphi$  függvények alkalmazása esetén a  $\mathbf{p}_\mathbf{v}$  vektornak különböző értékeit kapjuk. Ezek új keresési irányra épülő belsőpontos algoritmusokhoz vezetnek. Ebben a cikkben a  $\varphi(t) = \frac{\sqrt{t}}{2(1+\sqrt{t})}$  függvényt használjuk, amit először Kheirfam és Haghighi [5] vezettek be lineáris komplementaritási feladatok esetében. Ezáltal megadjuk az első belsőpontos algoritmust lineáris optimalizálásra, amely erre az irányra épül.

Léteznek más módszerek is a keresési irányok meghatározására. 2002-ben Peng, Roos és Terlaky [7] bevezették az önreguláris barrier függvények osztályát a keresési irányok meghatározására belsőpontos algoritmusok esetében. Bai, Ghami és Roos [1] elemezték a keresési irányok meghatározására vonatkozó magfüggvényes módszert belsőpontos algoritmusok esetében.

**3.1. Definíció.** (Bai, Ghami és Roos [1]) Egy  $\psi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  függvényt magfüggvénynek nevezünk, ha kétszer folytonosan differenciálható, és ha teljesülnek az alábbi feltételek:

1.  $\psi(1) = \psi'(1) = 0$ ;
2.  $\psi''(t) > 0$ , minden  $t > 0$ ;
3.  $\lim_{t \downarrow 0} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$ .

Ebben az esetben a keresési irányokat meghatározó skálázott rendszer a következő:

$$\begin{aligned}\bar{A}\mathbf{d}_x &= \mathbf{0}, \\ \bar{A}^T\Delta\mathbf{y} + \mathbf{d}_s &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s &= -\nabla\Psi(\mathbf{v}),\end{aligned}\tag{11}$$

ahol  $\Psi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Psi(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \psi(v_i)$  a magfüggvényhez tartozó barrier függvény. A (9) és (11) rendszerekből látszik az algebrailag ekvivalens átalakítás technikája és a magfüggvényekre épülő módszerek közötti kapcsolat. Különböző  $\varphi$  függvényekhez különböző magfüggvényt lehet hozzárendelni a

$$\psi(t) = \int_1^t \frac{\varphi(\bar{\tau}^2) - \varphi(1)}{\bar{\tau}\varphi'(\bar{\tau}^2)} d\bar{\tau},\tag{12}$$

összefüggés alapján. Fontos megemlíteni, hogy léteznek olyan  $\varphi$  függvények (pl.  $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ ), amelyekhez nem tartozik hagyományos magfüggvény. A következő fejezetben bemutatjuk az algoritmust.

#### 4. Új keresési irányra épülő belsőpontos algoritmust lineáris optimalizálásra

Tekintsük a  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt:

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{t}}{2(1 + \sqrt{t})}.\tag{13}$$

Ezt a függvényt alkalmazzuk az (5) rendszerre. Ebben az esetben a  $\mathbf{p}_v$  vektor az alábbi módon írható:

$$\mathbf{p}_v = \mathbf{e} - \mathbf{v}^2.\tag{14}$$

A (9) skálázott rendszer a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}\bar{A}\mathbf{d}_x &= \mathbf{0}, \\ \bar{A}^T\Delta\mathbf{y} + \mathbf{d}_s &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s &= \mathbf{e} - \mathbf{v}^2.\end{aligned}\tag{15}$$

A centrális úttól való távolság mérésére az alábbi centralitási mértéket használjuk:

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}; \mu) = \|\mathbf{p}_v\| = \|\mathbf{e} - \mathbf{v}^2\|. \quad (16)$$

Fontos megjegyezni, hogy ezt a centralitási mértéket már korábban is használta a szakirodalom [9], de azokban az esetekben a primál-duál logaritmikus barrier módszert használták a keresési irányok megválasztására, és nem az algebrailag ekvivalens átalakítás módszerét.

Az algoritmust az 1. ábra szemlélteti.

---

### Primál-duál belsőpontos algoritmus lineáris optimalizálásra

---

Legyen  $\epsilon > 0$  a pontossági paraméter,  $0 < \theta < 1$  a redukciós paraméter és  $\tau > 0$  a centralitási paraméter. Feltételezzük, hogy az  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{s}^0)$  hármasra teljesül a belső pont feltétel és  $\mu^0 = \frac{(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{s}^0}{n}$ . Továbbá, feltételezzük, hogy  $\delta(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0; \mu^0) < \tau$ .

**begin**

$\mathbf{x} := \mathbf{x}^0; \quad \mathbf{y} := \mathbf{y}^0; \quad \mathbf{s} := \mathbf{s}^0; \quad \mu := \mu^0;$

**while**  $\mathbf{x}^T \mathbf{s} > \epsilon$  **do begin**

Kiszámítjuk a  $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{s})$  irányokat a (9)-ből alkalmazva a (14)-t;

$\mathbf{x} := \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x};$

$\mathbf{y} := \mathbf{y} + \Delta \mathbf{y};$

$\mathbf{s} := \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s};$

$\mu := (1 - \theta)\mu;$

**end**

**end.**

---

1. ábra. Új keresési irányra épülő belsőpontos algoritmus lineáris optimalizálásra

Az alábbi tételben igazoljuk, hogy az algoritmus  $\mathcal{O}\left(\sqrt{n} \log \frac{n}{\epsilon}\right)$  bonyolultságú.

4.1. TÉTEL. (5.7. Tétel [8]) Feltételezzük, hogy  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{s}^0 = \mathbf{e}$ . Ha  $\theta = \frac{1}{5\sqrt{n}}$  és  $\tau = \frac{2}{3}$ , akkor az 1. ábrán megadott algoritmus legfeljebb

$$\left\lceil 5\sqrt{n} \log \frac{n}{\epsilon} \right\rceil$$

iterációban állít elő optimális megoldást. A kapott vektorokra teljesül az  $\mathbf{x}^T \mathbf{s} < \epsilon$  összefüggés.

## 5. Numerikus eredmények

A bevezetett belsőpontos algoritmust implementáltuk Matlab programozási nyelvben, hogy illusztráljuk az algoritmus működését. A kezdeti pontok meghatározására a Mehrotra heurisztikát használtuk [6]. A keresési irányokat a (6)

rendszerből határoztuk meg a  $\varphi(t) = \frac{\sqrt{t}}{2(1+\sqrt{t})}$  függvényt felhasználva. Minden iterációban ellenőriztük, hogy az adott pontoknak a centrális úttól való távolsága kisebb legyen a  $\tau$  centralitási paraméternél, amelynek alapértelmezett értéke a mi esetünkben  $\tau = \frac{1}{2}$  volt.

## 1. Feladat

Oldjuk meg az alábbi lineáris optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 2x_2, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 15, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Előbb átírjuk a feladatot (1) alakra. Ekkor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben az elméleti megoldás  $x_1 = \frac{10}{3}$ ,  $x_2 = \frac{25}{3}$  és az optimum  $-\frac{80}{3}$ . Az implementált algoritmus az alábbi eredményt adta:  $x_1 = 3.3333$ ,  $x_2 = 8.3333$  és a célfüggvény értéke  $-26.667$ .

## 2. Feladat

Tekintsük az alábbi lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{3}{10}x_1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4, \\ & x_1 + x_2 \geq 200, \\ & x_3 + x_4 \geq 200, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 800, \\ & \frac{1}{120}x_1 + \frac{1}{100}x_2 \leq 8, \\ & \frac{1}{75}x_3 + \frac{1}{50}x_4 \leq 8, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Ekkor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{75} & \frac{1}{50} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 800 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$



Az optimális megoldás  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 200$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 200$  és a célfüggvény értéke 140. Az implementált algoritmus az alábbi eredményeket szolgáltatta:  $x_1 = 0.00094021$ ,  $x_2 = 200.00$ ,  $x_3 = 0.00023505$ ,  $x_4 = 200.00$ , a célfüggvény értéke pedig 140.00.

## 6. Összefoglalás

Egy új keresési irányra épülő belsőpontos algoritmust vezettünk be lineáris optimalizálási feladatok megoldására. Az algebrailag ekvivalens átalakítás technikájában egy speciális függvényt használtunk a keresési irányok megválasztására. A módszer polinomialitására vonatkozó tételt is bemutattuk. Numerikus eredményekkel szemléltettük az algoritmus működését. További kutatási tervek közé tartozik egy olyan hosszú lépéses belsőpontos algoritmus megadása, amely ezt az irányt használja a keresési irányok meghatározására.

## Köszönetnyilvánítás

Rigó Petra Renáta kutatása az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának szakmai támogatásával készült.



Darvay Zsolt kutatását a Román Kutatási és Innovációs Minisztérium CNCS - UEFISCDI grant PN-III-P4-ID-PCE-2016-0190 számú projektje támogatta a PNCDI III keretében.

A szerzők köszönetüket fejezik ki Illés Tibornak, aki arra ösztönözte őket, hogy további kutatást végezzenek a keresési irányok körében.

## Hivatkozások

- [1] Y.Q. BAI, M. EL GHAMI AND C. ROOS: *A comparative study of kernel functions for primal-dual interior-point algorithms in linear optimization*, SIAM J. Optim., Vol. **15** No. **1**, pp. 101-128 (2004). DOI: [10.1137/S1052623403423114](https://doi.org/10.1137/S1052623403423114)
- [2] ZS. DARVAY: *New interior-point algorithms in linear programming*, Adv. Model. Optim., Vol. **5** No. **1**, pp. 51-92 (2003).
- [3] ZS. DARVAY, I.-M. PAPP AND P.-R. TAKÁCS: *Complexity analysis of a full-Newton step interior-point method for linear optimization*, Period. Math. Hung., Vol. **73** No. **1**, pp. 27-42, (2016). DOI: [10.1007/s10998-016-0119-2](https://doi.org/10.1007/s10998-016-0119-2)

- [4] N.K. KARMAKAR: *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, *Combinatorica*, Vol. **4** No. **4**, pp. 373-395, (1984). DOI: [10.1007/BF02579150](https://doi.org/10.1007/BF02579150)
- [5] B. KHEIRFAM AND M. HAGHIGHI: *A full-Newton step feasible interior-point algorithm for  $P_*(\kappa)$ -LCP based on a new search direction*, *Croat. Oper. Res. Rev.*, Vol. **7**, pp. 277-290, (2016). DOI: [10.17535/croirr.2016.0019](https://doi.org/10.17535/croirr.2016.0019)
- [6] S. MEHROTRA: *On the implementation of a primal-dual interior point method*, *SIAM J. Optim.*, Vol. **2** No. **4**, pp. 575-601, (1992) DOI: [10.1137/0802028](https://doi.org/10.1137/0802028)
- [7] J. PENG, C. ROOS AND T. TERLAKY: *Self-Regular Functions: a New Paradigm for Primal-Dual Interior-Point Methods*, Princeton University Press (2002).
- [8] P.R. RIGÓ AND E. SZÉNÁSI: *Interior-point algorithm for linear optimization based on a new search direction*, Technical Report Operations Research Report 2019-01, Eötvös Loránd University of Sciences, Budapest (2019). URL: <http://web.cs.elte.hu/opres/orr/>
- [9] C. ROOS, T. TERLAKY AND J.-PH. VIAL: *Theory and Algorithms for Linear Optimization*, Springer, New York, USA (2005).
- [10] GY. SONNEVEND: *An analytic center for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming*, In A. Prékopa and J. Szelecsán and B. Strazicky editor, *System Modelling and Optimization: Proceedings of the 12th IFIP-Conference held in Budapest Hungary, September 1985* *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 84, Springer Verlag, Berlin, West-Germany. pp. 866-876 (1986).
- [11] T. TERLAKY: *An easy way to teach interior-point methods*, *Eur. J. Oper. Res.*, Vol. **130** No. **1** pp. 1-19, (2001). DOI: [10.1016/S0377-2217\(00\)00094-1](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00094-1)
- [12] S.J. WRIGHT: *Primal-Dual Interior-Point Methods*, SIAM, Philadelphia, USA (1997).
- [13] Y. YE: *Interior Point Algorithms, Theory and Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, UK (1997).
- [14] Y. YE, M. J. TODD AND S. MIZUNO: *An  $O(\sqrt{n}L)$ -iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithm*, *Math. Oper. Res.*, Vol. **19** No. **1**, pp. 53-67, (1994). DOI: [10.1287/moor.19.1.53](https://doi.org/10.1287/moor.19.1.53)



Darvay Zsolt egyetemi docens a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karán. 1992-1995 között a mai kolozsvári Báthory István Elméleti Líceumban tanított informatikát és matematikát, 1991-1992-ben ösztöndíjasként a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézetében (SZTAKI) dolgozott. Doktori disszertációjában egy új módszert vezetett be a belsőpontos algoritmusok keresési irányainak meghatározására. 2018-ban a Babeş-Bolyai Tudományegyetem a tudományos kutatás kiválósági díjával tüntette ki. Kutatási területei: a lineáris

és nemlineáris optimalizálás belsőpontos algoritmusai és azok implementációja, programozási nyelvek, objektumelvű programozás.

DARVAY ZSOLT

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár  
darvay@cs.ubbcluj.ro



Rigó Petra Renáta 1992-ben született Kolozsváron. BSc és MSc tanulmányait a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karán végezte. 2016-ban felvételt nyert a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika és Számítástudományok Doktori Iskolájába, jelenleg negyedéves PhD hallgató. 2018-ban elnyerte a König Gyula Ifjúsági Kutatási Díjat. A PhD témakörében eddig 19 publikációja jelent meg és összesen több mint 25 hazai és nemzetközi konferencián tartott előadást. Kutatási témája az operációkutatás területéhez tartozik. Elsősorban a lineáris programozásra és szimmetrikus optimalizálásra vonatkozó

belsőpontos algoritmusok elméletével foglalkozik.

#### RIGÓ PETRA RENÁTA

Budapesti Corvinus Egyetem  
Corvinus Operációkutatási Kutatóközpont  
1093 Budapest, Fővám tér 8., E épület  
petra.rigo@uni-corvinus.hu



Szénási Eszter 1995-ben született Zentán. BSc tanulmányait a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi Karának matematika szakán végezte, ezt követően a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Alkalmazott matematika MSc operációkutatás szakirányán tanult tovább, és 2019-ben megszerezte a diplomáját. Diplomamunkájának témája a centrális út algebrailag ekvivalens transzformációjának hatása belsőpontos algoritmusokra, amely során a cikkben bevezetett algoritmus bonyolultságára vonatkozó elemzést vezette le. Már az egyetemi

tanulmányainak utolsó évében részmunkaidőben elkezdett dolgozni a SAS Institute Kft.-nél analitikai konzulensként, és ezt azóta teljes állásban folytatta. Munkája során rendszerkialakítással, vizualizációval, előrejelzéssel és optimalizációval foglalkozik.

#### SZÉNÁSI ESZTER

SAS Institute Kft., Budapest  
eszter.szenasi@sas.com

INTERIOR-POINT ALGORITHM FOR LINEAR OPTIMIZATION BASED ON A NEW  
SEARCH DIRECTION

ZSOLT DARVAY, PETRA RENÁTA RIGÓ, ESZTER SZÉNÁSI

We propose a new full-Newton step interior-point algorithm for linear optimization. We use the algebraic equivalent transformation technique [2] in order to determine the new search directions. We show that the method has polynomial complexity. Up to our best knowledge this is the first interior-point algorithm solving linear optimization problems, which uses this special search direction.

*Keywords:* linear optimization, interior-point algorithm, new search direction.

*Mathematics Subject Classification (2000):* 90C05, 90C51

## EGY VILLAMOSSÁGTANI PROBLÉMA, MATROIDELMÉLETI MEGOLDÁSSAL ÉS STATIKAI KÖVETKEZMÉNNYEL

PÉTERFALVI FERENC ÉS RECSKI ANDRÁS

Több mint fél évszázada vetődött fel a probléma, hogyan lehet eldönteni egy  $n$ -kapuról, hogy van-e hibrid leírása. A problémát Iri és Tomizawa matroidelméleti eszközökkel még a hetvenes években megoldotta, itt ennek egy természetes általánosítását vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy az általánosabb kérdéshez további – erősebb – matroidelméleti eszközök kellenek, végül megvizsgáljuk, hogy a rúdszerkezetek és a villamos hálózatok közötti régen ismert analógia ebben az esetben milyen statikai kérdéshez vezet.

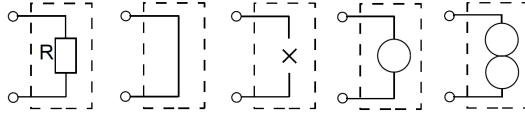
### 1. A villamosságtani probléma

A villamos hálózatok alkatrészek összekapcsolásával jönnek létre. A legegyszerűbb alkatrész egy ellenállás (ilyennel lehet modellezni pl. egy izzót vagy egy vasalót); a két végpontja között mérhető  $u$  feszültség és a rajta átfolyó  $i$  áram közötti kapcsolatot az  $u = Ri$  egyenlet (az ún. Ohm-törvény) fejezi ki, ahol az  $R$  konstans az alkatrész ellenállásának nevezzük. Valamivel bonyolultabb, de még jól ismert alkatrész az ideális transzformátor; ha ennek az egyik oldali feszültségét és áramát  $u_1$ -gyel, illetve  $i_1$ -gyel, a másik oldalit pedig  $u_2$ -vel, illetve  $i_2$ -vel jelöljük, akkor a négy mennyiség közötti kapcsolatot két egyenlet fejezi ki:  $u_2 = ku_1$  és  $i_1 = -ki_2$ , ahol a  $k$  konstans a transzformátor áttételének nevezzük. Ezek közös általánosításaként vezessük be az alábbi fogalmat:

*1.1. Definíció. Lineáris (időinvariáns rezisztív)  $n$ -kapunak* nevezünk egy olyan alkatrészt, amely  $n$  póluspáron („kapun”) keresztül kapcsolódik a külvilághoz és amelyet az  $\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{i} = \mathbf{0}$  egyenlet ír le, ahol  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$   $n \times n$ -es valós elemű mátrixok, melyekre teljesül az  $r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = n$  feltétel,  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{i}$  pedig  $n$  magasságú valós vektorok, melyek elemeit az egyes kapuk feszültségeinek, ill. áramainak fogjuk nevezni.

Így például az 1. ábra első 1-kapuja az  $u - Ri = 0$  egyenlettel leírt, korábban már látott ellenállás, a második és a harmadik a „rövidzár” és a „szakadás”, melyek úgy írhatóak le, hogy  $u = 0$  (és  $i$  tetszőleges), illetve  $i = 0$  (és  $u$  tetszőleges). Az utolsó két (fiktív) alkatrész az  $u = i = 0$  egyenletrendszerrel leírt *nullátor*, illetve az „ $u$  is,  $i$  is tetszőleges” tulajdonságú *norátor*, ezek a fenti definíció szerint nem

tekinthetők 1-kapunak, mert  $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$  rangja 2, ill. 0. Az 1.1. Definíció szerinti megadásuk rendre  $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (1| -R)$ ,  $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (1|0)$ ,  $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (0|1)$ ,  $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ , illetve az „üres mátrix” (hisz nincs egyenletünk).



1. ábra: Ellenállás, rövidzár, szakadás, nullátor és norátor

Az  $r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = n$  rang-feltétel azt jelenti, hogy az  $\mathbf{M} = (\mathbf{A}|\mathbf{B})$  mátrix oszlopai közül kiválaszthatunk  $n$  darab lineárisan függetlent. Ha véletlenül az  $\mathbf{A}$  oszlopai mind függetlenek, akkor az  $n$ -kapunak létezik az  $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{i}$  *rezisztencia-leírása*. Hasonlóképpen, ha a  $\mathbf{B}$  oszlopai függetlenek, akkor létezik az  $\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{u}$  *konduktancia-leírás*. A fenti példák közül a rövidzárnak csak rezisztencia-leírása, a szakadásnak csak konduktancia-leírása van, míg az ellenállásnak mind a kettő, ha  $R \neq 0$ .

**1.1. ÁLLÍTÁS.** Helyezzünk az  $n$ -kapu minden kapujára áramforrást. A keletkezett villamos hálózat akkor és csak akkor lesz egyértelműen megoldható (vagyis a keletkező feszültségek akkor és csak akkor lesznek egyértelműen kifejezhetők ezen áramok lineáris kombinációjaként), ha az  $n$ -kapunak létezik rezisztencia-leírása. Hasonlóképp ha minden kapura feszültségforrást helyezünk, akkor a konduktancia-leírás létezése az egyértelmű megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele.

**1.2. Definíció.** E két leírásmód közös általánosításaképp tegyük fel, hogy a kapuk  $P = \{1, 2, \dots, n\}$  halmaza felbontható két diszjunkt  $P = P' \cup P''$  részhalmazra úgy, hogy az  $\mathbf{A}$  mátrix  $P'$ -nek megfelelő oszlopai és a  $\mathbf{B}$  mátrix  $P''$ -nek megfelelő oszlopai együtt az  $\mathbf{M}$  egy nonsinguláris  $n \times n$ -es részmátrixát alkossák. Legyen  $\mathbf{u}'$  és  $\mathbf{u}''$  a  $P'$ , ill. a  $P''$  kapuk feszültségei által alkotott két vektor és legyen az  $\mathbf{i}'$  és az  $\mathbf{i}''$  definíciója hasonló. Ekkor az  $\mathbf{u}'$  és  $\mathbf{i}''$  vektorok egyértelműen előállnak az  $\mathbf{u}''$  és  $\mathbf{i}'$  függvényeként. Az ilyen  $\mathbf{u}' = \mathbf{U}\mathbf{u}'' + \mathbf{R}\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{i}'' = \mathbf{G}\mathbf{u}'' + \mathbf{V}\mathbf{i}'$  előállítást az  $n$ -kapu *hibrid leírásának* nevezzük.

**1.2. ÁLLÍTÁS.** Akkor és csak akkor létezik a kapuk halmazának olyan  $P = P' \cup P''$  partíciója, hogy a  $P''$ -kapukra feszültségforrást, a  $P'$ -kapukra áramforrást helyezve egyértelműen megoldható hálózatot kapunk (vagyis a  $P''$ -kapuk áramai és a  $P'$ -kapuk feszültségei akkor és csak akkor lesznek egyértelműen kifejezhetők a többi mennyiség lineáris kombinációjaként), ha az  $n$ -kapunak létezik legalább egy hibrid leírása.

Ez az állítás különféle lineáris algebrai megfogalmazásokban számos helyen megtalálható az irodalomban [3, 5, 30, 32]. Például a 2. ábra első 2-kapujának

létezik rezisztencia-leírása, nevezetesen  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ .

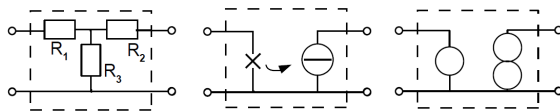
Könnyű látni, hogy ha az  $R_1 + R_3$ ,  $R_2 + R_3$ ,  $R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$  mennyiségek egyike sem 0, akkor ennek a 2-kapunak létezik mind a négy hibrid leírása. A második 2-kapu egy feszültségvezérelt áramforrás, melynek konduktancia-leírása

$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ , és ennek a 2-kapunak más hibrid leírása nem is létezik. A

harmadik 2-kapu egy nullátor-norátor pár (amit *nullor*-nak is neveznek [3]), ennek semmilyen hibrid leírása nem létezik, azonban definíciónk szerint ez is 2-kapu az

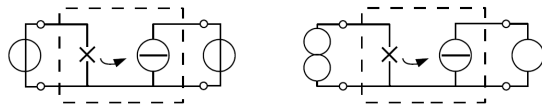
$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$  leírással, jöllehet a nullátor és a norátor külön-külön

nem tekinthetők 1-kapunak. (Megjegyezzük, hogy a kapuk halmazának bármely rögzített  $P = P' \cup P''$  partíciója esetén nyilván található olyan  $n$ -kapu, melynek épp az a hibrid leírása nem létezik. Lehetséges az  $n$ -kapukat úgy *parametrizálni*, hogy kivétel nélkül mindegyiknek legyen leírása, de ez nem lineáris algebrai eszközökkel történik [29].)



2. ábra: Egy rezisztív 2-kapu, egy feszültségvezérelt áramforrás és egy nullátor-norátor pár

A fentiek szerint a 3. ábra első hálózata, ahol a 2. ábrán már látott feszültségvezérelt áramforrás mindkét kapujára egy-egy feszültségforrást kapcsoltunk, egyértelműen megoldható, mert a 2-kapunak létezik konduktancia-leírása. Ha a feszültség- és áramforrások más variációját alkalmaznánk, nem jutnánk egyértelműen megoldható hálózathoz. Azonban  $g \neq 0$  esetén a 3. ábra második hálózata is egyértelműen megoldható, ahol feszültség- vagy áramforrások helyett egy norátort és egy nullátort kapcsoltunk a kapukra. A 3. ábra két hálózatának közös általánosítása végett bevezetünk egy új fogalmat.



3. ábra: A feszültségvezérelt áramforrás két lehetséges beágyazása

**1.3. Definíció.** Egy  $n$ -kapu *beágyazásának* nevezzük a kapujain értelmezett  $E : P \rightarrow \{\text{feszültségforrás, áramforrás, nullátor, norátor}\}$  függvényt. Egy ilyen beágyazás *szabályos*, ha ugyanannyi kapuhoz rendelünk nullátort, mint norátort.

Egy szabályos beágyazás *megengedett*, ha a keletkezett hálózat egyértelműen megoldható. Ilyenkor a nullátoroknak és a norátoroknak ezt a közös számát a megengedett  $E$  beágyazás *szingularitási fokának* nevezzük. Az összes megengedett beágyazás szingularitási fokainak halmazát az  $n$ -kapu *spektrumának* nevezzük.

1.1. KÖVETKEZMÉNY. *Egy  $n$ -kapunak akkor és csak akkor van hibrid leírása, ha létezik 0 szingularitási fokú beágyazása, vagyis ha 0 eleme a spektrumának.*

Az 1.2. Állítás általánosításához először a kapuk  $P$  halmazának az 1.2. Definícióban leírt particionálását kell általánosítanunk. Legyen  $P = P_U \cup P_I \cup P_{UI} \cup P_\infty$  a kapuk felosztása olyan diszjunkt, nem feltétlenül nemüres részhalmazokra, ahol  $P_{UI}$  és  $P_\infty$  elemszáma azonos. Jelölje  $\mathbf{u}^{(1)}$  a  $P_U \cup P_{UI}$ -beli kapuk feszültségeiből képzett vektort és  $\mathbf{i}^{(2)}$  a  $P_I \cup P_{UI}$ -beli kapuk áramaiból képzett vektort. Legyen  $\mathbf{u}^{(2)}$  és  $\mathbf{i}^{(1)}$  a maradék feszültségek, ill. áramok vektora.

1.3. ÁLLÍTÁS. *Az alábbi három állítás ekvivalens minden  $n$ -kapura:*

1. Az  $\mathbf{u}^{(2)}$  és  $\mathbf{i}^{(1)}$  vektorokat egyértelműen meg lehet határozni az  $\mathbf{u}^{(1)}$  és  $\mathbf{i}^{(2)}$  ismeretében.
2. Az  $\mathbf{M}$  mátrix azon oszlopai, amelyek a  $P_U \cup P_\infty$ -beli kapuk áramainak és a  $P_I \cup P_\infty$ -beli kapuk feszültségeinek felelnek meg, egy nemszinguláris  $n \times n$ -es részmátrixot alkotnak.
3. Megengedett az a beágyazás, amely a  $P_U$ -kapukhoz feszültségforrást, a  $P_I$ -kapukhoz áramforrást, a  $P_{UI}$ -kapukhoz nullátort és a  $P_\infty$ -kapukhoz norátort rendel.

A 3. ábra szemlélteti, hogy a feszültségvezérelt áramforrás spektruma  $\{0, 1\}$ . Könnyen ellenőrizhető, hogy a 2. ábra első 2-kapujának mindig van 0 szingularitási fokú beágyazása, 1 szingularitási fokú pedig akkor és csak akkor, ha  $R_3 \neq 0$ . To-

vábbi példák az  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$  mátrixszal megadott 3-kapu, valamint

az [5] cikkben szereplő 4-kapu, melynek mátrixa  $\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ .

Az előbbinek a spektruma  $\{1\}$ ; két megengedett beágyazása van, nevezetesen  $E(3)$  mindenképp nullátor, de vagy  $E(1)$  áramforrás és  $E(2)$  norátor, vagy  $E(1)$  norátor és  $E(2)$  feszültségforrás. Az utóbbinak a spektruma  $\{1, 2\}$ ; négy megengedett beágyazása van, ugyanis  $E(1)$  mindenképp norátor és  $E(2)$  mindenképp nullátor lesz, de a 3. és a 4. kapura vagy egy feszültség- és egy áramforrást kell kötnünk



(tetszőleges sorrendben), vagy egy nullátort és egy norátort (szintén tetszőleges sorrendben).

Nyilván minden  $n$ -kapu spektruma a  $\{0, 1, \dots, m\}$  halmaz nemüres részhalmaza, ahol  $m$ -mel  $n/2$  alsó egészrészét jelöltük. Az  $n$ -kapu összes lehetséges beágyazásainak száma  $4^n$ , ezek közül a szabályosaké csak  $\sum_{d=0}^m \binom{n}{d} \binom{n-d}{d} 2^{n-2d}$ . Mivel a szabályos beágyazások az  $\mathbf{M}$  maximális  $n \times n$ -es részmátrixainak felelnek meg, adódik, hogy a szumma értéke  $\binom{2n}{n}$ .

A nullátorok és norátorok fogalmát Carlin vezette be [3] és Oono [19] vetette fel, hogy mely  $n$ -kapuknak létezik legalább egy hibrid leírása. Természetesen egy adott  $\mathbf{M}$  mátrix esetén ez elvben eldönthető mind a  $2^n$  lehetséges partíció végigpróbálásával (minden esetben egy-egy  $n \times n$ -es részmátrix szingularitását kell vizsgálni), de – mint ezt a következő szakaszban látni fogjuk – létezik polinom idejű algoritmus is (Iri és Tomizawa, [11]). Ennek természetes általánosításaként kérdezhetjük, mi az egész spektrum meghatározásának a bonyolultsága.

## 2. A matroidelméleti megoldás

Iri és Tomizawa [11] fent említett eredményéhez matroidelméleti eszközökkel juthatunk el. Az  $\mathbf{M}$  mátrix meghatároz egy  $\mathcal{M}$  matroidot az oszlopvektorainak  $S$  halmazán. Defináljunk ugyanezen az  $S$  halmazon egy másik  $\mathcal{N}$  matroidot is, melyben egy részhalmaz akkor és csak akkor független, ha az  $\{u_1, i_1\}, \{u_2, i_2\}, \dots, \{u_n, i_n\}$  párok mindegyikét legfeljebb egy elembe metszi. Vegyük észre, hogy ez épp egy partíciós matroid [22].

**2.1. ÁLLÍTÁS.** (Iri és Tomizawa [11]) Az  $\mathbf{M}$  által meghatározott  $n$ -kapunak akkor és csak akkor létezik hibrid leírása, ha ennek a két matroidnak létezik közös bázisa, ez pedig polinom idő alatt ellenőrizhető [6].

Jegyezzük meg, hogy mai szemmel ez az állítás teljesen kézenfekvő, de a hetvenes évek elején egyike volt annak a néhány eredménynek [11, 18, 22], amelyek felhívták a figyelmet a matroidok műszaki területeken való alkalmazhatóságára.

**2.2. ÁLLÍTÁS.** [28] Általánosabban a mátrixával adott  $n$ -kapu spektruma polinom idő alatt meghatározható.

A bizonyítás három részből áll. Iri és Tomizawa eredményének kézenfekvő módosításával belátható, hogy ha a két fenti matroidnak nincs közös bázisa (amely esetben a matroid-metszet algoritmus egy maximális méretű közös független  $X$  halmazt talál), akkor a spektrum legkisebb értéke  $n - |X|$ . Frank András egy javító utas algoritmussal [8] tetszőleges matroidokra bebizonyította, hogy ha a spektrum egnél több elemet tartalmaz, akkor mindig szomszédos egészek halmaza. Így csak

a spektrum legnagyobb értékét kell meghatároznunk. Ez viszont nem más, mint annak a maximuma, hogy az  $\{u_1, i_1\}, \{u_2, i_2\}, \dots, \{u_n, i_n\}$  párok közül hányat tartalmazhat egy  $\mathcal{M}$ -beli független halmaz. Ez a kérdés tetszőleges matroidok körében nem válaszolható meg polinom idő alatt, ld. [12, 16], de létezik hatékony algoritmus [15], ha az  $\mathcal{M}$  reprezentálva van a valós test felett, márpedig esetünkben épp az  $\mathbf{M}$  mátrix adja ezt a reprezentációt.

### 3. A kapcsolódó statikai kérdés

Egy  $n$  pontú,  $e$  élű egyszerű gráfot elképzelhetünk síkbeli rúdszerkezetként, melyben az élek merev rudaknak, a pontok gömbcsuklóknak felelnek meg. Intuíciónk alapján érezzük, hogy pl. a 3 hosszú körnek megfelelő rúdszerkezet merev lesz, a 4 hosszú körnek megfelelő szerkezet deformálható, de merevvé tehetjük egy átló hozzávételével.

A pontos definíció érdekében jelölje  $(x_i, y_i)$  az  $i$ -edik csukló helykoordinátáit; ekkor a gráf  $i$ -edik és  $j$ -edik pontja közötti élnek megfelelő rúd azt jelenti, hogy az  $((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2}$  távolság állandó marad a rúdszerkezet mozgása során. Ezeknek az egyenleteknek a négyzetre emelésével, az idő szerinti deriválásával, majd 2-vel való osztásával nyerjük az  $(x_i - x_j)(x'_i - x'_j) + (y_i - y_j)(y'_i - y'_j) = 0$  egyenleteket. Ezeket együtt egy  $\mathbf{W}\mathbf{z} = \mathbf{0}$  egyenletrendszerként tekinthetjük, ahol  $\mathbf{z}$  elemei az  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n$  mennyiségek (a csuklók sebességkoordinátái) és az  $e \times 2n$  méretű  $\mathbf{W}$  mátrixnak a sorai a gráf éleinek felelnek meg: a gráf  $i$ -edik és  $j$ -edik pontja közötti élnek megfelelő sor  $i$ -edik eleme  $x_i - x_j$ ,  $j$ -edik eleme  $x_j - x_i$ ,  $(n + i)$ -edik eleme  $y_i - y_j$ ,  $(n + j)$ -edik eleme  $y_j - y_i$ , az összes többi eleme 0 lesz.

Ha az egész rúdszerkezet deformáció nélkül, merev testként mozog, akkor a csuklók sebességkoordinátái kielégítik ezt az egyenletrendszert. A síkban ezek a mozgások (eltolások, forgatások) a  $2n$ -dimenziós térnek egy 3-dimenziós alterét alkotják. Így  $r(\mathbf{W}) \leq 2n - 3$  mindig teljesül; akkor tekintünk *merevnek* egy rúdszerkezetet, ha  $r(\mathbf{W}) = 2n - 3$ .

Megjegyezzük, hogy a szakirodalomban (ld. pl. [10]) ezt a fogalmat infinitezimális merevségnek nevezik, más merevségi fogalmak is ismeretesek.

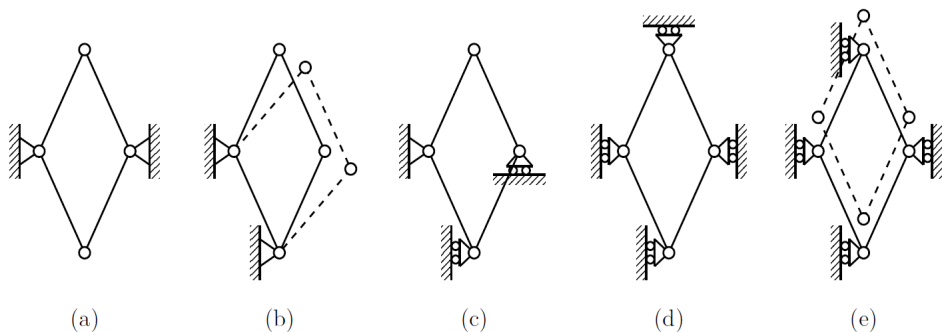
A korábban említett rúdszerkezet esetén, amelynek gráfja egy 4 hosszú kör volt, az egyenletrendszer mátrixa

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_1 & 0 & 0 & y_1 - y_2 & y_2 - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_3 & x_3 - x_2 & 0 & 0 & y_2 - y_3 & y_3 - y_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 - x_4 & x_4 - x_3 & 0 & 0 & y_3 - y_4 & y_4 - y_3 \\ x_1 - x_4 & 0 & 0 & x_4 - x_1 & y_1 - y_4 & 0 & 0 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}$$

Ennek rangja legfeljebb 4 (vagyis kisebb, mint  $2 \cdot 4 - 3$ ), tehát a rúdszerkezet biztosan nem merev. A továbbiakban tekintsünk el az olyan „elfajuló” esetektől, amikor a 4 csukló közül valamelyik 3 „véletlenül” egy egyenesre esik (mert akkor a csukló-koordináták közötti algebrai kapcsolat csökkentené a rangot), így a mátrix rangja ténylegesen 4 lesz. Vizsgáljunk meg néhány példát, hogy mely oszlopnégyesek elhagyásával kapunk nemszinguláris mátrixot.

- Hagyjuk el az 1., 3., 5. és 7. oszlopokat – ez annak felel meg, hogy egyértelműen meghatározható-e minden más sebességkoordináta, ha megadjuk az  $x'_1, x'_3, y'_1, y'_3$  mennyiségek értékét. Legyen ez a négy érték 0, ez fizikailag annak felel meg, hogy az 1. és 3. csuklót *leszúrjuk*, hisz sem  $x$ , sem  $y$  irányban nem mozdulhatnak el. Ilyenkor a maradék két csukló sem mozdulhat el.
- Nem kapnánk viszont nemszinguláris mátrixot, ha az 1., 2., 5. és 6. oszlopokat hagynánk el, hisz a fentiekhez hasonlóan ez annak felelne meg, hogy az 1. és 2. (tehát két szomszédos) csuklót szúrunk le, ilyenkor viszont a másik két csukló még elmozdulhat.
- Nemszinguláris mátrixhoz jutnánk az 1., 2., 5. és 7. oszlopok elhagyásával. Ez fizikailag az 1. csukló leszúrásán kívül azt jelenti, hogy a 2. csukló  $x$ -irányú és a 3. csukló  $y$ -irányú mozgását akadályoztuk meg – szemléletesen a 2. csukló csak egy függőleges, a 3. pedig csak egy vízszintes *sínen* mozoghat.
- Nemszinguláris mátrixhoz jutnánk az 1., 2., 3. és 8. oszlopok elhagyásával is – ez fizikailag az 1., 2. és 3. csukló függőleges, a 4. csukló vízszintes sínre helyezésének felel meg.
- Nem kapnánk viszont nemszinguláris mátrixot, ha az 1., 2., 3. és 4. oszlopokat hagynánk el – ez fizikailag annak felel meg, hogy akkor mindegyik csukló függőleges sínen mozoghatna.

A 4. ábra öt rajza szemlélteti a fenti lehetőségeket. Általában is megállapíthatjuk, hogy pontosan akkor jutunk nemszinguláris mátrixhoz, ha a rúdszerkezetet *rögzítettük*, vagyis az összes csukló mozgását megakadályoztuk.



4. ábra

Ha a fenti  $\mathbf{W}$  mátrix egy villamos hálózat valamelyik 4-kapujának a leíró mátrixa lenne, akkor minek felelne meg ez az öt eset?

Az (a) és (b) esetekben 2-2 kapunak (az 1. és 3., ill. az 1. és 2. számúaknak) mind a feszültségét, mind az áramát előírnánk és azt kérdeznénk, hogy ezek egyértelműen meghatározzák-e a maradék két kapu feszültségét és áramát – vagyis azt kérdeznénk, hogy egyértelműen megoldható-e az a villamos hálózat, melynek az 1. és 3., ill. az 1. és 2. számú kapujaira nullátort, a maradék két kapura pedig norátort kötünk.

A (c) eset annak felel meg, hogy az 1. kapura nullátort, a 2.-ra feszültségforrást, a 3.-ra áramforrást, végül a 4. kapura norátort kötünk.

A (d) és (e) eseteknek megfelelő hálózatokban viszont nem alkalmaztunk nullátor-norátor párt, hanem csak feszültségforrásokat (és a (d) esetben áramforrást is).

Ez a formális analógia a villamos hálózatok és a síkbeli rúdszerkezetek között (ahol tehát a nullátorok felelnek meg a csuklók leszúrásának, a feszültség- és áramforrások a csuklók sínre helyezésének, a norátorok pedig annak, hogy a csuklóval „nem csinálunk semmit”, vagyis a helyzetét csak a szomszédos csuklókhoz csatlakozó rudak határozzák meg), már mintegy 35 éve ismert, ld. [23-26].

Ennek megfelelően definiálhatjuk a *rúdszerkezet spektrumát* is: egy  $k$  szám akkor és csak akkor tartozzik bele ebbe a számhalmazba, ha van a rúdszerkezetnek olyan *minimális* rögzítése, ahol pontosan  $k$  csuklót szúrunk le. A minimális jelző arra utal, hogy a sínre helyezett csuklók  $t$  számára teljesülnie kell, hogy  $t + 2k = 2n - r(\mathbf{W})$ .

(Hangsúlyozzuk ki, hogy itt a (gráf által meghatározott) rúdszerkezet spektrumáról van szó – ne tévesszük össze a gráf spektrumával, ami teljesen más gráfelméleti fogalom [2].)

Hogyan határozható meg egy rúdszerkezet spektruma? A 3. szakaszban láttuk alapján ez bármely numerikusan adott mátrix esetén polinom időben lehetséges: az intervallum legkisebb értékét a matroid partíciós algoritmussal, a legnagyobb értékét a jóval nehezebb lineáris matroid párosítási algoritmussal határozzuk meg és Frank András idézett tétele minden matroidra érvényes, nem csak az  $n$ -kapuk mátrixa által reprezentáltakra. Tekintettel azonban arra, hogy itt a mátrix nagyon szabályos szerkezetű, elképzelhető, hogy a feladat egyszerűbb lesz.

Ahogy a korábbi példában (a 4 hosszú körnél) feltettük, hogy semelyik három csukló nem esik egy egyenesre, a továbbiakban általánosságban feltesszük, hogy a rúdszerkezet a gráfot a „lehető legszabálytalanabb módon” valószínűsítette meg, a csuklók „általános” helyzetűek, vagyis koordinátáik között semmilyen „véletlen” algebrai kapcsolat nincs. A merevség irodalmában ezt a gráf *generikus* megvalósításának nevezik, ez elérhető például, ha a koordináták algebrailag függetlenek a racionális test felett. Erre a feltevésre azért van szükség, mert ezáltal a merevség tényleg a gráf tulajdonsága lesz (nem pedig az adott gráf valamely konkrét megvalósításának a tulajdonsága, amely a gráf kombinatorikai tulajdonságain kívül a rudak hosszától is függne).

Feltehetjük, hogy a rúdszerkezet gráfja összefüggő, hisz különben komponensenként vizsgálnánk a kérdést. Az is világos, hogy merev rúdszerkezetek spektruma mindig a  $\{0, 1\}$  halmaz lesz, ugyanis alapvetően kétféle minimális rögzítése lehet egy síkbeli merev rúdszerkezetnek: vagy leszúrnunk egy csuklót és sínre teszünk egy másikat, vagy három csuklót teszünk sínre úgy, hogy a sínek között vízszintes is, függőleges is legyen.

Könnyen belátható, hogy a spektrum minimuma minden összefüggő gráf esetén 0 vagy 1, és pedig 1 a fákra és 0 a kört tartalmazó gráfokra. Az alapötlet az, hogy egy kör rögzítéséhez nincs szükség leszúrássra – gondoljunk a 4. ábra (d) rajzára –, a fákat viszont nem lehet csak sínekkel rögzíteni: a fent látott  $t + 2k = 2n - r(\mathbf{W})$  egyenlet nem teljesülhet  $k = 0$  esetén, mert a mátrixnak csak  $n - 1$  sora van.

Így az egyetlen nyitott kérdés a spektrum maximumának a minél egyszerűbb (az általános eset matroidos apparátusát nem alkalmazó) meghatározása maradt. Ez egy nehezebb feladat, azonban, ahogy [21] észrevette, már megoldották [31], természetesen nem használva a spektrum itt bevezetett terminológiáját. A megoldás első lépése Fekete [7] eredménye, aki rúdszerkezetek olyan rögzítéseit vizsgálta, ahol kizárólag a csuklók leszúrást engedjük meg, sínre helyezésre nincs lehetőség. A rögzítéshez szükséges leszúrássok minimális számának meghatározását visszavezette egy (nem feltétlenül páros) segédgráfban maximális élszámú párosítás keresésére. (A visszavezetés módja és helyességének egyszerű bizonyítása megtalálható [9]-ben is.)

Ennek az eredménynek az ismeretében azonnal adódik a kérdés, hogy az így kapott minimális leszúrással megkezdett spektrum egy maximális elemének? Mivel minden minimális rögzítésre teljesül a  $t + 2k = 2n - r(\mathbf{W})$  egyenlőség, vagyis a  $t + 2k$  mennyiség egy rögzített érték, ezért  $k$  akkor maximális, amikor  $t + k$ , vagyis a valamilyen módon rögzített csuklók együttes száma minimális. Ha egy minimális rögzítésben a sínre helyezett csuklókat is teljesen leszúrjuk, akkor a rúdszerkezet továbbra is rögzített marad, ezért  $t + k$  nem lehet kisebb, mint egy minimális leszúrással megszámlált csukló. Így csak az a kérdés, hogy ha adott egy minimális leszúrással, akkor ebből mindig megkaphatunk-e egy minimális rögzítést úgy, hogy néhány, a leszúrással szereplő csukló rögzítését leszúrással helyett sínre cseréljük. Az igenlő válasz Streinu és Theran [31] eredményéből következik.

Ahhoz, hogy a kérdést pusztán kombinatorikai apparátussal vizsgálhassuk, először azt érdemes észrevenni, hogy nem fontos megkülönböztetnünk egymástól a vízszintes, illetve függőleges sínre helyezett csuklókat. Ehelyett beszélhetünk egyszerűen a sínre helyezett csuklók halmazáról, amelynek minden csuklóját egy tetszőleges irányú sínre helyezzük úgy, hogy az irányok együttesen *generikusak* legyenek. Az világos, hogy ha adott egy vízszintes és függőleges sínre helyezéseket tartalmazó rögzítés, akkor az ebben szereplő csuklók generikus sínre helyezése is rögzít. A fordított irány, hogy a generikusan sínre helyezett csuklókhoz hogyan tudunk hozzárendelni csak vízszintes és függőleges síneket úgy, hogy a rúdszerkezet rögzített maradjon, nem triviális, egy lehetséges megoldást mutat [31].

Mielőtt rátérnénk Streinu és Theran fő eredményére, érdemes bemutatnunk egy arra vonatkozó klasszikus tételt, hogy, rögzítésekről egyelőre nem beszélve, hogyan írhatjuk le kombinatorikai eszközökkel egy rúdszerkezet merevségét.

**3.1. Definíció.** Egy  $G = (V, E)$  gráfot *ritka gráfnak* nevezzük, ha minden  $X \subseteq V, |X| \geq 2$  ponthalmazra  $i(X) \leq 2|X| - 3$  teljesül, ahol  $i(X)$  az  $X$  által indukált élek halmaza.

**3.1. ÁLLÍTÁS. (LAMAN-TÉTEL).** [13] Egy gráf egy generikus megvalósításához tartozó  $\mathbf{W}$  merevségi mátrix sorai akkor és csak akkor függetlenek, ha a gráf ritka.

Streinu és Theran egy ezzel analóg tételt bizonyított ritka gráfok minimális rögzítéseiről:

**3.2. Definíció.** Legyen  $G = (V, E + L)$  egy olyan gráf, amely hurokéleket is tartalmazhat, és ahol  $E$  jelöli a gráf „valódi”,  $L$  a hurokéleinek halmazát. Azt mondjuk, hogy  $G$  *hurok-ritka*, ha  $(V, E)$  ritka és még az is teljesül, hogy minden  $X \subseteq V$  ponthalmazra  $i_{E+L}(X) \leq 2|X|$ .

**3.2. ÁLLÍTÁS.** [31] Legyen adott egy  $G = (V, E)$  ritka gráf és ennek egy leszúrásskból és sínre helyezésekből álló rögzítése. Legyen a  $G'$  gráf a  $G$  kibővítése hurokélekkel úgy, hogy minden olyan csúcshoz, amely egy leszúrt csuklónak felel meg, hozzáveszünk két hurokélet, és minden olyan csúcshoz hozzáveszünk egy hurokélet, amely sínre helyezett csuklónak felel meg. Ekkor  $G$  rögzítése akkor és csak akkor minimális, ha  $G'$  hurok-ritka.

A minimális rögzítésekkel kapcsolatos algoritmusok alapja pedig a következő eredmény:

**3.3. ÁLLÍTÁS.** [14] Egy rögzített  $V$  csúcshalmazon megadható összes hurok-ritka gráf élhalmazai egy matroid független halmazait alkotják.

**3.1. Megjegyzés.** Az így kapott matroid bázisait pontosan azok a hurok-ritka gráfok alkotják, amelyeknél az  $i_{E+L}(X) \leq 2|X|$  egyenlőtlenség  $V$ -re egyenlőséggel teljesül, vagyis az élszám a csúcsszám kétszerese. A hurok-ritkasághoz megkövetelt másik,  $i_E(X) \leq 2|X| - 3$  egyenlőtlenség  $V$ -n való egyenlőséggel teljesülése nem szükséges ahhoz, hogy egy gráf bázis legyen.

Mielőtt a fenti állításokat alkalmaznánk, még azt kell megjegyeznünk, hogy a rögzítések vizsgálatánál mindig feltehetjük, hogy a rögzítendő rúdszerkezetet leíró gráf ritka. Egy rögzítés ugyanis pontosan akkor rögzít egy gráfot, mint amikor annak egy maximális független részgráfját, maximális független részgráf keresésére pedig ismertek hatékony algoritmusok (pl. [1]). Ezzel pedig választ is kaptunk arra, hogy egy minimális leszúrássból kapható-e azonos számú csukló rögzítését tartalmazó minimális rögzítés: ha egy ritka gráf minden, egy minimális leszúrássában szereplő csúcsához hozzáveszünk két hurokélt, akkor egy olyan gráfot kapunk,

amely az adott csúcshalmazon a hurok-ritkasági matroid szerint maximális rangú, így a matroid-tulajdonság miatt az eredeti ritka gráf élhalmaza ezen hurokélek egy részének hozzáadásával bázissá bővíthető, ami pedig egy minimális rögzítésnek felel meg.

A Fekete által adott algoritmus tehát elegendő arra, hogy meghatározzuk a spektrum maximális elemét, ha azonban egy konkrét minimális rögzítést is megszeretnénk kapni, akkor nem elég tudnunk, hogy a minimális leszúráshoz tartozó, hurokélekkel kibővített gráf tartalmazza a hurok-ritkasági matroid egy bázisát, hanem meg is kell határoznunk egy ilyen bázist. Erre Lee, Streinu és Theran [14] algoritmusát használhatjuk. Végül, ha generikus sínre helyezések helyett egy kizárólag függőleges és vízszintes síneket tartalmazó rögzítést akarunk kapni, egy [31]-ben leírt algoritmus használható. Ennek az utolsó két lépésnek az elvégzésére egy alternatív eljárást ad [21].

Mivel már Fekete algoritmusát is feltételezi, hogy a gráf, amelyben minimális leszúrásért keresünk, ritka, egy minimális rögzítést megtaláló algoritmus a következő három lépésből áll:

1. Megkeressük a kiindulási gráf egy maximális független élhalmazát.
2. A kapott ritka gráfhoz elkészítünk egy segédgráfot, és ebben maximális párosítást keresünk.
3. Az előző lépésben megkapott minimális leszúrást által meghatározott hurokélek felhasználásával a hurok-ritkasági matroid egy bázisává bővítjük a ritka gráfot.

Az 1. lépés futásideje az ismert legjobb algoritmusokkal  $O(n^2)$ , ahol  $n$  a kiindulási gráf csúcsszáma. A 2. lépésbeli segédgráfnak  $O(n)$  csúcsa és  $O(n)$  éle van, így a Micali-Vazirani-algortmussal [17] a lépés futásideje  $O(n^{1.5})$ . A 3. lépés futásideje ismét  $O(n^2)$ , így azt kaptuk, hogy a spektrum maximális eleme meghatározható  $O(n^2)$  futásidőben.

## Köszönetnyilvánítás

A kutatást az NKFI (OTKA#124171), valamint az EMMI BME Mesterséges Intelligencia FIKP (BME FIKP-MI/SC) programja támogatta.

## Hivatkozások

- [1] BERG, A. AND JORDÁN, T.: *Algorithms for graph rigidity and scene analysis*, Proc. 11th Annual European Symposium on Algorithms (ESA) 2003, (G. Di Battista, U. Zwick, eds) Springer Lecture Notes in Computer Science, Vol. **2832**, pp. 78-89 (2003). DOI: [10.1007/978-3-540-39658-1\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-540-39658-1_10)

- [2] BROUWER, A. E. AND HAEMERS, W. H.: *Spectra of graphs*, Springer, New York (2012). DOI: [10.1007/978-1-4614-1939-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6)
- [3] CARLIN, H. J.: *Singular network elements*, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. **11** No. **1**, pp. 67-72 (1964). DOI: [10.1109/TCT.1964.1082264](https://doi.org/10.1109/TCT.1964.1082264)
- [4] CHUA, L. O. AND LAM, Y. F.: *A theory of algebraic n-ports*, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. **20** No. **4**, pp. 370-382 (1973). DOI: [10.1109/TCT.1973.1083715](https://doi.org/10.1109/TCT.1973.1083715)
- [5] CHUA, L. O. AND LAM, Y. F.: *Dimension of N-ports*, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. **21** No. **3**, pp. 412-416 (1974). DOI: [10.1109/TCS.1974.1083876](https://doi.org/10.1109/TCS.1974.1083876)
- [6] EDMONDS, J.: *Minimum partition of a matroid into independent subsets*, J. Res. Nat. Bur. Stand. Vol. **69B** Nos. **1** and **2**, pp. 67-72 (1965). DOI: [10.6028/jres.069B.004](https://doi.org/10.6028/jres.069B.004)
- [7] FEKETE, ZS.: *Source location with rigidity and tree packing requirements*, Operations Research Letters, Vol. **34** No. **6**, pp. 607-612 (2006). DOI: [10.1016/j.orl.2005.10.005](https://doi.org/10.1016/j.orl.2005.10.005)
- [8] FRANK, A.: személyes közlés, 2017. október.
- [9] FRANK, A. AND JORDÁN, T.: *Diszkrét optimalizálás*, Typotex, Budapest (2014).
- [10] GRAVER, J., SERVATIUS, B. AND SERVATIUS, H.: *Combinatorial rigidity*, American Math. Soc. Graduate Studies in Mathematics, Vol. **2** (1993). DOI: [10.1090/gsm/002](https://doi.org/10.1090/gsm/002)
- [11] IRI, M. AND TOMIZAWA, N.: *A unifying approach to fundamental problems in network theory by means of matroids* (in Japanese), Trans. Inst. Electron. & Commun. Eng. Jpn. Vol. **57A**, pp. 35-41 (1975).
- [12] JENSEN, P. M. AND KORTE, B.: *Complexity of matroid property algorithms*, SIAM J. Computing, Vol. **11** No. **1**, pp. 184-190 (1982). DOI: [10.1137/0211014](https://doi.org/10.1137/0211014)
- [13] LAMAN, G.: *On graphs and rigidity of plane skeletal structures*, J. Eng. Math. Vol. **4**, pp. 331-340, 1970. DOI: [10.1007/BF01534980](https://doi.org/10.1007/BF01534980)
- [14] LEE, A., STREINU, I. AND THERAN, L.: *Graded sparse graphs and matroids*, J. Univ. Comput. Sci., Vol. **13** No. **11**, pp. 1671-1679 (2007). DOI: [10.3217/jucs-013-11-1671](https://doi.org/10.3217/jucs-013-11-1671)
- [15] LOVÁSZ, L.: *Matroid matching and some applications*, J. Combinatorial Theory Ser. B, Vol. **28** No. **2**, pp. 208-236 (1980). DOI: [10.1016/0095-8956\(80\)90066-0](https://doi.org/10.1016/0095-8956(80)90066-0)
- [16] LOVÁSZ, L.: *The matroid matching problem*, Coll. Math. Soc. János Bolyai, Vol. **25**, pp. 495-517 (1981).
- [17] MICALI, S. AND VAZIRANI, V. V.: *An  $O(\sqrt{VE})$  algorithm for finding maximum matching in general graphs*, IEEE 21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 17-27 (1980). DOI: [10.1109/SFCS.1980.12](https://doi.org/10.1109/SFCS.1980.12)
- [18] NARAYANAN, H.: *Theory of matroids and network analysis*, PhD thesis, Indian Institute of Technology, Bombay (1974).
- [19] OONO, Y.: *Formal realizability of linear networks*, Proc. Symp. Active Networks and Feedback Systems, Polytechn. Inst. Brooklyn, pp. 475-485 (1960).
- [20] OXLEY, J.: *Matroid theory*, Oxford Univ. Press, Oxford (2006). DOI: [10.1093/acprof:oso/9780198566946.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566946.001.0001)



- [21] PÉTERFALVI, F.: *Síkbeli rúdszerkezetek spektrumának algoritmikus vizsgálata*, BSc szakdolgozat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki és Informatikai Kar, Budapest (2020).
- [22] RECSKI, A.: *On partitional matroids with applications*, Coll. Math. Soc. János Bolyai, Vol. **10**, pp. 1169-1179 (1973).
- [23] RECSKI, A.: *A network theory approach to the rigidity of skeletal structures 1. Modelling and interconnection*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **7** No. **3**, pp. 313-324 (1984). DOI: [10.1016/0166-218X\(84\)90007-6](https://doi.org/10.1016/0166-218X(84)90007-6)
- [24] RECSKI, A.: *A network theory approach to the rigidity of skeletal structures 2. Laman's theorem and topological formulae*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **8** No. **1**, pp. 63-68 (1984). DOI: [10.1016/0166-218X\(84\)90079-9](https://doi.org/10.1016/0166-218X(84)90079-9)
- [25] RECSKI, A.: *A network theory approach to the rigidity of skeletal structures 3. An electric model for planar frameworks*, Structural Topology, Vol. **9**, pp. 59-71 (1984).
- [26] RECSKI, A.: *Statics and electric network theory: a unifying role of matroids*, W. Pulleyblank (ed): Progress in Combinatorial Optimization, Academic Press, London, pp. 307-314 (1984). DOI: [10.1016/B978-0-12-566780-7.50024-6](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-566780-7.50024-6)
- [27] RECSKI, A.: *Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics*, Springer, Berlin (1989). DOI: [10.1007/978-3-662-22143-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-22143-3)
- [28] RECSKI, A.: *Hybrid description and the spectrum of linear multiports*, IEEE Trans. Circuits and Systems - II: Express Briefs, Vol. **66** No. **9**, pp. 1502-1506 (2019). DOI: [10.1109/TCSII.2018.2890305](https://doi.org/10.1109/TCSII.2018.2890305)
- [29] RECSKI, A. AND ZOLLER, V.: *On the parametrization of linear memoryless 2-ports*, Internat. J. Circuit Th. Appl. Vol. **10** No. **1**, pp. 57-67 (1982). DOI: [10.1002/cta.4490100106](https://doi.org/10.1002/cta.4490100106)
- [30] SOMEDA, C.: *The bigenerator - an active pathological network*, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. **16** No. **1**, pp. 125-126 (1969). DOI: [10.1109/TCT.1969.1082916](https://doi.org/10.1109/TCT.1969.1082916)
- [31] STREINU, I. AND THERAN, L.: *Slider-pinning rigidity: a Maxwell-Laman-type theorem*, Discrete & Computational Geometry, Vol. **44**, pp. 812-837 (2010). DOI: [10.1007/s00454-010-9283-y](https://doi.org/10.1007/s00454-010-9283-y)
- [32] WILLSON, A. N.: *New theorems on the equations of nonlinear DC transistor networks*, Bell Syst. Tech. J., Vol. **49** No. **8**, pp. 1713-1738 (1970). DOI: [10.1002/j.1538-7305.1970.tb04287.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1970.tb04287.x)

Péterfalvi Ferenc

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,  
Villamosmérnöki és Informatikai Kar,  
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék  
1521 Budapest, Pf. 91.  
fpeterfalvi@gmail.com



Recski András 1971-ben szerzett okleveles matematikusi diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen (ELTE), 1971-1984 között a Távközlési Kutatóintézet kutatója. 1972 óta oktat az ELTE-n, 1990 óta a Budapesti Műszaki Egyetemen (BME). 1988 óta egyetemi tanár, 1990-2011 között tanszékvezető a BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszékén, majd 2012-2017 között a BME Matematika és Számítástudományi Doktori Iskola vezetője. 2009 óta az Aquincumi Technológiai Intézet tudományos igazgatója. Hosszabb ideig volt vendégprofesszor az USA-ban (Cornell University, Yale University), Kanadában, Németországban és Japánban. Kutatási területe: matroidelmélet, kombinatorikus optimalizálás és ezek műszaki alkalmazásai. 1969 óta a Bolyai János Matematikai Társulat tagja, 2006-2015 között a Társulat főtítkára. 1999-2005 között az MTA Matematikai Bizottságának alelnöke.

Recski András

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,  
Villamosmérnöki és Informatikai Kar,  
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék  
1521 Budapest, Pf. 91.  
recski@cs.bme.hu

A PROBLEM IN ELECTRIC NETWORK THEORY, ITS SOLUTION VIA MATROID  
THEORY AND A COROLLARY IN STATICS

FERENC PÉTERFALVI AND ANDRÁS RECSKI

Oono asked more than 50 years ago, how one can determine if an  $n$ -port has a hybrid description. Iri and Tomizawa solved this problem in the early seventies, using tools of matroid theory. Here we study a natural generalization of this question. We show that stronger matroidal tools are required for the more general problem. Using the well-known analogy between frameworks and electric networks we also present the corresponding problem in statics.

## PÁROSÍTÁSI STRATÉGIÁK POZÍCIÓS JÁTÉKOKON

GYÖRFFY LAJOS

Az amőba típusú játékok témaköre a matematika egyik üde színfoltja. A kérdések olykor egy általános iskolás számára is érthetők, egyes válaszokat azonban még ma is kutatnak a kombinatorikusok. Ilyen játékok legismertebb példái a Tic-Tac-Toe és az 5-amőba, melyek mellett azonban számos másik játék is vizsgálatra érdemes. A cikkben bemutatunk néhány nyerő stratégiát sok példával, majd pedig a 9-amőba lehetséges párosításait karakterizáljuk és teljes leírást adunk a párosítások szimmetrikus struktúrájára, melynek során egy négydimenziós kocka is előkerül.

### 1. Bevezetés

Gyakran előfordult általános iskolás éveim alatt, hogy egy-egy unalmasabb óra közepén padtársammal előkaptunk egy „kockás” lapot, és valamilyen játékot kezdtünk el játszani, amíg a tanár észre nem vette. Kedvenc játékunk az Amőba, más néven Ötödölő volt. Itt – hasonlóan a normál hipergráf játékokhoz – két játékos felváltva rak saját jeléből (X és O) egy négyzetrácsos lap négyzeteibe, amíg egyikük meg nem szerez egy teljes nyerőhalmazt. A *hipergráf játék* szóhasználatot az indokolja, hogy a játék táblája tekinthető egy hipergráfnak, melynek csúcsai a mezők, élei pedig a nyerőhalmazok.

Az ilyen játékokat általában *pozíciós játékok*nak nevezzük, azonban a pozíciós játékok közé minden, pozíciók által jellemezhető játékot besorolhatunk (pl. sakk, malom), így a cikkben a szűkebb és pontosabb hipergráf játék kifejezést használjuk.

Egy hipergráf játék kimenetele háromféle lehet: kezdő nyer, a második nyer vagy pedig döntetlen eredmény születik, amennyiben egyik fél sem jár sikerrel pl. a tábla telítődése előtt. John Nash azonban egy másik játékra már 1949-ben megmutatta, hogy tökéletes játék esetén a második játékos nem nyerhet, hiszen ha lenne nyerő stratégiája, azt a kezdő játékos el tudná lopni, ezt hívjuk *stratégialopás*nak [7]. Éppen ezért matematikai szempontból indokolható a *Maker-Breaker*, magyarul *Építő-Romboló* játékok bevezetése.

Ezekben a játékokban a kezdő (Maker) célja továbbra is egy nyerőhalmaz teljes megszerzése, a második játékos (Breaker) célja azonban változik a *normál*, avagy

*Maker-Maker* játékhoz képest: Breakerként most akkor nyer, ha meg tudja akadályozni Maker nyerését (Breakernek tehát nem célja nyerőhalmazt szerezni, csak Makert akadályozni). A stratégialopás miatt normál játékokban (tökéletes játék esetén) nem nyerhet a második, a M-B verzióban viszont igen.

Mielőtt továbbmennénk, érdemes néhány szót ejteni a számokról, pl. az egyik legkisebb játék, a Tic-Tac-Toe esetében. A Tic-Tac-Toe játék táblája a  $3 \times 3$ -as négyzet, nyerőhalmazai pedig a három vízszintes, három függőleges ill. két átlós hármas. Itt összesen  $9! \approx 3,6 \cdot 10^5$  lehetséges játszma van,  $\sum_{i=0}^9 \binom{9}{i} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} \approx 7 \cdot 10^3$  lehetséges pozíció és  $8^9 \cdot 6^{9 \cdot 7} \cdot 4^{9 \cdot 7 \cdot 5} \cdot 2^{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \approx 10^{500}$  lehetséges Breaker stratégia létezik (hiszen Breaker a Maker kezdő 9 lépésére 8, majd a  $9 \cdot 7$  lépésre 6, stb. választ tud adni). Ez a szám mutatja, hogy már egy kis játék esetén is nehéz dolgunk van, ha az összes lehetséges stratégiát vizsgáljuk. Tekintsünk néhány példát a hipergráf játékokra.

*1.1. Példa. (Tic-Tac-Toe)* A két játékos felváltva tesz egy-egy jelet a kilenc négyzetből álló  $3 \times 3$ -as tábla egy-egy mezőjére. Aki elfoglal egy teljes sort, oszlopot vagy főátlót, az nyer.

*1.2. Példa. (Amőba)* A végtelen négyzetrácson (gyakorlatban füzetlapon) játssza két játékos. Felváltva jelölik a mezőket, s aki hamarabb képes öt, egymást követő mezőt vízszintesen, függőlegesen vagy átlós irányban elfoglalni, az nyer.

*1.3. Példa. (k-amőba)* Az előző játékhoz nagyon hasonló, azonban öt helyett  $k$  darab mezőt kell megszerezni a győzelemhez. Jelöljük  $\mathcal{H}_k$ -val a  $k$ -amőba hipergráfját. A játék az irányok szerint is általánosítható, ha az eredeti négy irány  $((0,1), (1,0), (1,1), (-1,1))$  helyett más irányvektorokat veszünk.

*1.4. Példa. (Hales-Jewett játékok)* A  $HJ(n, d)$ -vel jelölt játék táblája egy  $d$  dimenziós kocka, amelyik  $n^d$  kisebb kockából áll. A nyerőhalmazok pedig a soroknak, oszlopoknak és különféle átlóknak megfelelő  $n$ -esek. Pl.  $HJ(3, 2)$  a Tic-Tac-Toe.

A 2. fejezetben ismertetjük a legfontosabb lehetséges stratégiákat: a teljes esetvizsgálatot, a súlyfüggvények módszerét, a résztáblákra bontás stratégiáját és a párosításokat, majd áttekintjük, milyen eredményeket adnak ezen módszerek az Amőbára és néhány természetes általánosítására. A 3. fejezetben pedig az egyik legérdekesebb eset, a 9-amőba összes lehetséges jó párosítását keressük meg, jellemezzük és foglaljuk egy szép tulajdonságokkal rendelkező gráfba.

## 2. Stratégiák és korábbi eredmények

### 2.1. Lehetséges stratégiák

A stratégiák közül az elsőként említendő a *teljes esetvizsgálat*. Láthattuk azon-

ban a bevezetőben, hogy a legtöbb esetben ez már viszonylag kis játékok esetén is teljesen reménytelennek tűnik. Okos megfontolásokkal azonban néha mégis hozhat eredményt. A Tic-Tac-Toe esetében ezzel a módszerrel kapjuk, hogy a Maker-Maker (M-M) játék döntetlen, a Maker-Breaker (M-B) játék viszont kezdő nyerő. Ez a tény is mutatja, hogy M-B esetben Makernek könnyebb dolga van nyerni, mint a M-M esetben, hiszen itt sosem kell foglalkoznia a második játékos fenyegetéseivel. A továbbiakban (hacsak külön nem említjük) a M-B játékokkal foglalkozunk.

Egy másik, régóta ismert stratégia a *súlyfüggvények* stratégiája, mely Erdős Pál és John Selfridge nevéhez fűződik [4]. Itt a nyerő halmazokat veszélyességük szerint súlyozzuk, általában kettőhatványokkal.

**2.1. TÉTEL.** (Erdős-Selfridge) [4] Breaker nyer a  $\mathcal{H} = (V, E)$  hipergráf játék M-B változatában, ha Maker kezd és  $\sum_{A \in E} 2^{-|A|+1} < 1$ , ahol  $|A|$  jelöli az  $A$  nyerőhalmaz elemszámát, az összegzést pedig az összes élre elvégezzük.

Ha egy hipergráf megfelel a tételbeli kezdeti feltételnek, akkor a Breaker nyerő stratégiát egy mohó algoritmus adja. A megfelelően választott súlyfüggvény alapján Breaker mindig azt a mezőt választja, amelyik a legnagyobb csökkenést okozza a súlyok összegében. Mivel a súlyfüggvények összege kezdetben is egynél kisebb és a játék során minden lépésben csökken, így a játék végére sem érheti el az 1-et. Ha viszont volna Makernek nyerő lépése, akkor ezen lépés előtt egy egyelemű nyerőhalmaz lenne, melyre  $2^{-|I|+1} = 1$  lenne, ami ellentmondás, tehát Maker nem nyerheti meg a játékot. Súlyfüggvények általában sűrűbb hipergráfokra adnak nyerő stratégiát, ilyenekre találunk példákat a Beck [2] könyvben.

A következő stratégia a *résztáblákra bontás* [9], melyben Breaker előzetesen felbontja a végtelen négyzetrácsot kisebb résztáblákra, melyeken új nyerőhalmazokat definiál. Breaker egy lépésben mindig azon a táblán lép, amelyiken Maker is lépett az utolsó lépésében. Megfelelő felbontás esetén, ha Breakernek sikerül megakadályoznia, hogy Maker megszerezzen akár csak egy nyerőhalmazt valamelyik résztáblán, akkor a teljes táblán is nyeri a játékot.

Utoljára maradt a minket leginkább érdeklő *párosítások stratégiája* [7]. Általános menete, hogy Breaker előre bepárosítja a tábla elemeit, és ha Maker választ egy elemet, Breaker lépésében annak a párját választja.

**2.1. Definíció.** Adott egy  $\mathcal{H} = (V, E)$  hipergráf. A  $\rho : X \rightarrow Y$  bijekciót, ahol  $X, Y \subset V(\mathcal{H})$  és  $X \cap Y = \emptyset$  **párosításnak** nevezzük a  $\mathcal{H}$  hipergráfon.

**2.2. Definíció.** Egy  $(x, \rho(x))$  pár **blokkol** egy  $A \in E(\mathcal{H})$  élt, ha  $A$  a pár mindkét elemét tartalmazza. Ha a  $\rho$  párosítás párpai blokkolják a hipergráf összes élt, azt mondjuk, hogy  $\rho$  egy **jó párosítás** a  $\mathcal{H}$  hipergráfon.

A párosítások így egy lehetséges Breaker nyerő stratégiát adhatnak a hipergráf játékokon. A  $\rho$  jó párosítás a  $\mathcal{H}$  hipergráfon a következőképpen alkalmazható nyerő stratégiaként Breaker számára a Maker által választott  $x$  esetén: (a) ha

$x \notin X \cup Y$ , akkor Breaker tetszőleges csúcsot választhat; (b) ha  $x \in X$ , akkor Breaker  $\rho(x)$ -et választja; (c)  $x \in Y$  esetén  $\rho^{-1}(x)$ -et választja. Követve a  $\rho$ -beli párokat a M-B játékban, minden Maker által választott  $x \in X \cup Y$  elem után Breaker  $\rho(x)$ -et,  $x$  párját választja, vagy  $x \in Y$  esetén fordítva (ha  $x \notin X \cup Y$ , akkor Breaker tetszőleges csúcsot választhat). Így Breaker blokkolja az összes élt és nyeri a játékot.

## 2.2. Eredmények az amőbára

Nyilvánvaló, hogy a tökéletes stratégiákat tekintve, ha Makernek van nyerő stratégiája egy adott  $\mathcal{H}_k$  hipergráfon, akkor a  $k$ -nál kisebb értékekre is nyeri a játékot. Hasonlóan, ha Breaker rendelkezik a  $\mathcal{H}_k$  hipergráfon nyerő stratégiával, akkor minden  $k$ -nál nagyobb értékre is nyer.

**2.2. TÉTEL.** *Maker nyeri a 5-amőbát (és így az ötnél kisebbeket is) a végtelen táblán.*

A bizonyítás számítógépes esetvizsgálaton alapul, mely 1993-ban Allisnek és társainak [1] sikerült. Jegyezzük meg, kezdő nyerése nem bizonyított még a M-M játékra, kizárólag a  $15 \times 15$ -ös, ill. a  $19 \times 19$ -es táblákon. A meglepő tény oka, hogy újabb nyerőhalmazok vétele elronthatja a kezdő nyerési stratégiáját a M-M esetben (ún. extra set paradoxon).

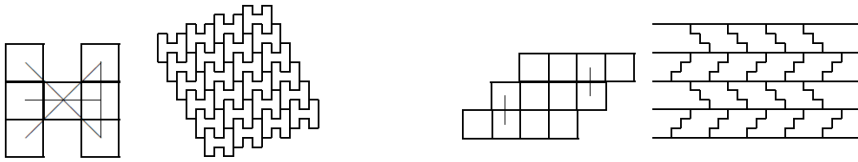
Másik oldalról vizsgálva, az Erdős-Selfridge-tétel egy trükkös alkalmazása szerint (ld. Beck [2]) Breaker nyeri a 13-amőbát. A párosítások már a  $k = 9$  eset Breaker nyerését is adják, a résztáblákra bontás stratégiájával pedig már a 8-amőba Breaker nyerése is megmutatható.

**2.3. TÉTEL.** *Breaker nyeri a 8-amőbát (és így a nyolcnál nagyobbakat is) a végtelen táblán [2, 9].*

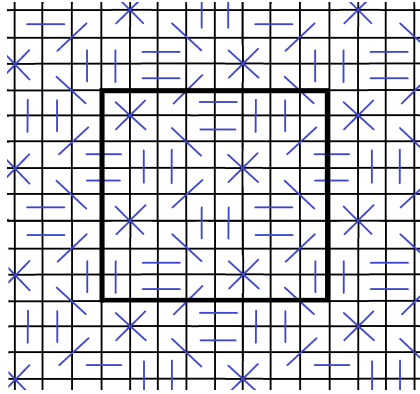
A bizonyítás A. Brouwer nevéhez fűződik, aki 1980-ban T.G.L. Zetters álnéven publikálta az eredményt. Az 1. ábra negyedik része szerint felosztjuk a táblát  $3 \times 4$ -es paralelogrammákra, melyeken mind a három vízszintes négyes, mind a négy átlós hármas és a két vonallal jelzett függőleges kettes egy-egy nyerőhalmaz lesz, a harmadik ábra szerint. Ha egy ilyen paralelogrammán Breaker meg tudja akadályozni Makert célja elérésében, akkor az egész táblán is, így Breaker nyer. Az 1. ábra első két része a 9-amőbára mutat egy Breaker nyerő résztáblákra bontást.

**2.1. Megjegyzés.** A  $k = 6$  ill. 7 esetek a végtelen (vagy elég nagy, pl  $100 \times 100$ ) táblán a mai napig nyitott kérdések.

**2.2. Megjegyzés.** Párosítással a  $k = 9$  eset a legkisebb, amelyre Breaker nyerése belátható. Ez A. Hales és R. Jewett nevéhez fűződik [7], és a 2. ábrán látható, ahol a párokat a vonallal összekötött négyzetek szemléltetik. A párosítást a végtelen síkon a bekeretezett 8-as négyzet természetes kiterjesztésével kapjuk.



1. ábra. Résztablákra bontás a 9- és a 8-amőba ellen



2. ábra. Párosítási stratégia a 9-amőba ellen

A következő állítás megmutatja, hogy nem létezhet jó párosítás a  $k$ -amőba hipergráfjára, ha  $k < 9$ .

Egy  $\mathcal{H}$  hipergráfra legyen  $d_2(\mathcal{H})$  (röviden  $d_2$ ) azon élek maximális száma, amelyeket blokkolhat egy két csúcsból álló pár, vagyis  $d_2$  a maximális közös fok (co-degree). Ezen értéket szemléletesen nevezhetjük a pár **blokkolási erejének** is.

**2.1. ÁLLÍTÁS.** [3] *Ha létezik egy  $\rho$  jó párosítás a  $\mathcal{H} = (V, E)$  hipergráfra, akkor  $d_2|X|/2 \geq |\mathcal{G}|$  egyenlőtlenségnek teljesülnie kell minden  $X \subset V$  esetén, ahol  $\mathcal{G} = \{A : A \in E, A \subset X\}$ .*

*Bizonyítás.* Az  $X$  részhalmazra mint résztablára fogunk utalni.  $\mathcal{G}$  éleit csak  $X$ -beli párokkal blokkolhatjuk. Legfeljebb  $|X|/2$  ilyen pár van  $\rho$ -ban az  $|X|$  méretű résztablán. Mivel egy pár legfeljebb  $d_2$  élt blokkol,  $|X|/2$  pár legfeljebb  $d_2|X|/2$  élt blokkolhat. Így, ha ennél több él van a résztablán, nem létezhet jó párosítás.  $\square$

A 2.1. Állítás segítségével megkapjuk, hogy nincs jó párosítás  $\mathcal{H}_k$ -ra, ha  $k < 9$ . A  $\mathcal{H}_k$  hipergráfban  $d_2 = k - 1$ , vagyis egy pár legfeljebb  $k - 1$  élt blokkolhat. Ennyit is csak abban az esetben, ha a pár *dominó*, azaz szomszédos elemekből álló

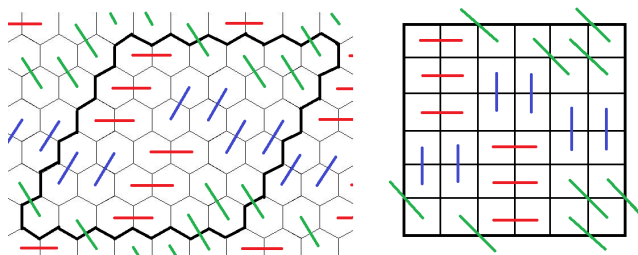


pár. Ha  $X$  egy  $n \times n$  résztábla egy elég nagy  $n$ -re, akkor  $|\mathcal{G}| = 4n^2 + O(n)$  mivel minden négyzetből négy él kezdődik (egy vízszintes, egy függőleges és két átlós, kivéve a határokat). A 2.1. Állításból kapjuk, hogy  $(k-1)n^2/2 \geq 4n^2 + O(n)$ ; vagyis  $k \geq 9 + O(1/n)$ .

Amennyiben az irányok közül eltekintünk néhánytól, kisebb, ám szintén érdekes problémákat kaphatunk:

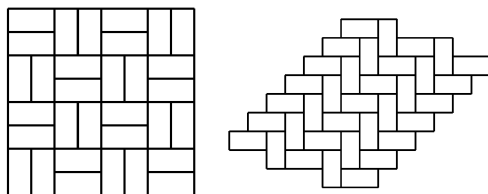
2.2. ÁLLÍTÁS. Ha az egyik átlót elhagyjuk és csak a három megmaradó  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  irányt vesszük, akkor a kapott tábla ekvivalens a hatszögrácssal. Ezen a táblán Maker nyeri a 4- vagy annál kisebb eseteket, Breaker pedig párosítással nyeri a 7- vagy annál nagyobb eseteket, ld. 3. ábra.

2.3. Megjegyzés. A  $k = 5$  ill. 6 esetek még nyitott kérdések.



3. ábra. Párosítás a 3-irányú 7-amőba ( $h_7$ ) ellen

2.3. ÁLLÍTÁS. Ha csak az  $(1,0)$  és  $(0,1)$  irányokat vesszük, Maker szintén 4-ig nyer, 5-től azonban itt már Breaker nyer, szintén párosításokkal, ld. 4. ábra.



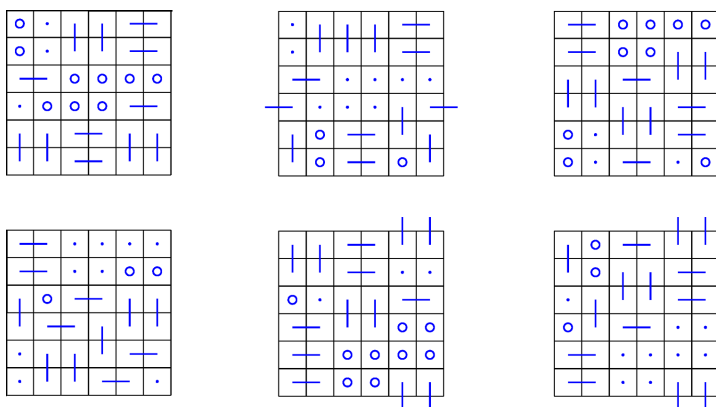
4. ábra. Párosítás a kétirányú 5-amőba ( $P_5$ ) ellen

Ha csak egy irányt veszünk, ott 2 és 3 között van a Maker és Breaker nyérése közti váltás. Érdekeség, hogy a kétirányú 5-amőba elleni védekezésre csak a 4. ábrán látható párosítások létezhetnek [3], melyek mindegyike gyakori térkövezési minta pl. Szegeden is, ld. 5. ábra. Az eredményeket az 1. táblázatban foglaltuk össze, ahol  $k$  a nyerőhalmazok hossza,  $n$  pedig az irányok száma.

$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8	$\geq 9$
1	M	B	B	B	B	B	B	B
2	M	M	M	B	B	B	B	B
3	M	M	M	?	?	B	B	B
4	M	M	M	M	?	?	B	B

1. táblázat. Ki nyeri az  $n$  irányú  $k$ -amőbát5. ábra.  $P_5$  párosításai a Dugonics téren

Általában is igaz a  $d$ -dimenziós végtelen táblán, hogy ha  $n$  irányban engedjük meg az egyforma hosszú nyerőhalmazokat, akkor  $k < 2n+1$  esetekben nem létezik párosítás a megfelelő  $k$ -amőbákra, ez adódik a 2.1. Állításból. Fordítva viszont egyelőre nem bizonyított, bár sejtjük, hogy  $k = 2n + 1$  esetben mindig létezik is párosítás [8]. Erre egy példát mutatunk 3 dimenzióban, a 6. ábrán.



6. ábra. A 3D 7-amőba egy lehetséges Breaker nyerő párosítása

2.4. ÁLLÍTÁS. [5] Létezik jó (azaz Breaker nyerő) párosítás a 3 dimenziós, három irányú  $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$  7-amőbára, ld. 6. ábra (ahol a pontok és karikák jelölik a függőleges párokat, a hat négyzet pedig, a bal felsőtől kezdve a jobb alsóig, a párosítás rétegeit adja).

A legélesebb esetben, vagyis amikor  $k = 2n + 1$ , a párosításbeli párokat valamilyen értelemben *optimálisan* kell használnunk, hiszen ha egy pár nem blokkolja a lehető legtöbb élt, vagy egy él blokkolására több párt is elhasználunk, akkor már nem állhat egyenlőség a 2.1. Állításban. Mielőtt a következő részben rátérnénk a két dimenzióban érdekes eset, a 9-amőba párosításainak vizsgálatára, nézzük meg a hipergráf játékoknak a Beck József által megadott [2] osztályozását.

0. **Triviális nyerés:** Ebbe a kevéssé érdekes osztályba azon hipergráfok tartoznak, amelyekben minden játszma kezdő nyerő. Ha  $n$  a legkisebb méretű él,  $|V| \geq 2n - 1$  és  $V$  minden  $n$ -elemű halmaza él (pl.  $2 \times 2$ -es Tic-Tac-Toe).
1. **Kényszerített győzelem:** Ebben az osztályban minden játszmának van győztese, vagyis nem létezik döntetlen. Így az osztályban minden játék kezdő nyerő, hiszen mivel döntetlen nincs, a stratégialopás adja az eredményt. A nyerő stratégia mikéntje azonban nem feltétlenül ismert (pl.  $3 \times 3 \times 3$ -es Tic-Tac-Toe).
2. **Finom győzelem:** Ide tartoznak azok a játékok, melyekben létezik döntetlen pozíció, ennek ellenére a kezdő játékosnak létezik nyerő stratégiája a normál játékban (pl. 3- és 4- és 5-amőba a  $19 \times 19$ -es táblán).
3. **Finom döntetlen:** Azon hipergráfok osztálya, melyek normál verziója döntetlen, de a Maker-Breaker játékot nyeri Maker (pl. Tic-Tac-Toe).
4. **Erős döntetlen:** Létezik Breaker nyerő stratégia a M-B játékban, de párosítási stratégia nem (pl. 8-amőba, sejtjük, hogy a 6- és 7-amőba is).
5. **Párosításos döntetlen:** Ezen osztály elemeire létezik Breaker nyerő párosítási stratégia (pl. 9-amőba).

### 3. A 9-amőba párosításai

A korábban említett *optimalitás* azt jelenti a 9-amőba ( $\mathcal{H}_9$ ) esetén, hogy:

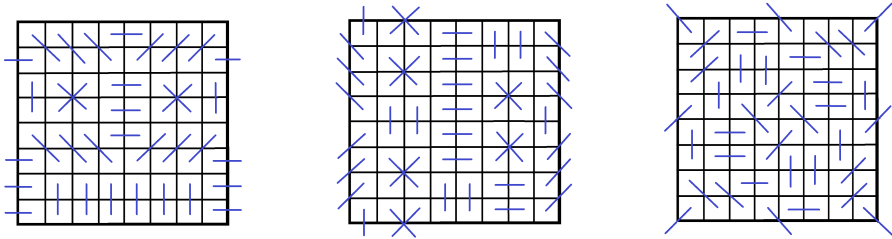
- (a) egy párosításban szereplő párok mindegyike pontosan  $k - 1$  élt blokkol (vagyis szomszédos elemekből) áll minden pár, ezt *dominó párosításnak* nevezzük;
- (b) minden élt pontosan egy pár blokkol (ebből az egy egyenesen elhelyezkedő párok 8-periodicitása következik);
- (c) minden mező le van fedve egy párral.

Egy olyan mezőt, ahol a fenti három feltétel egyike sérül, *anomáliának* fogunk nevezni. A 2.1. Állítás  $O(n)$  tagja miatt ilyen előfordulhatna a táblán, azonban [5] cikkben sikerült bebizonyítani, hogy mégsem lehetséges.

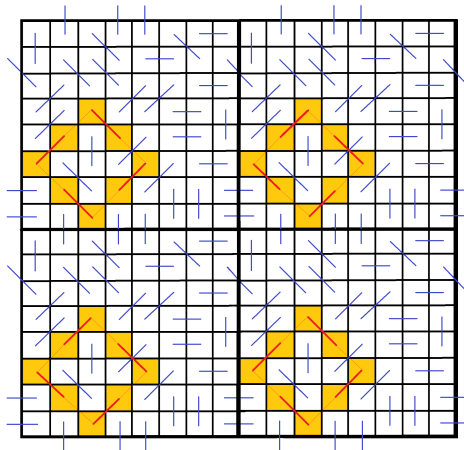
**3.1. Definíció.** A végtelen négyzetrácsos sík egy párosítása  $k$ -tórusz, ha az éppen egy  $k \times k$ -as tórusz kiterjesztése a végtelen síkra, ahol  $k$  minimális.

**3.1. Megjegyzés.** A 2. ábrán látható Hales-Jewett párosítás pl. 8-tórusz, hiszen a párosítás a bekeretezett  $8 \times 8$ -as négyzet ismétlődése a végtelen síkon.

**3.1. TÉTEL.** [5] *Tegyük fel, hogy létezik egy jó párosítás  $\mathcal{H}_9$ -re. Akkor az csak 8- vagy 16-tórusz lehet. Ilyen párosítások vannak is, ld. 7. és 8. ábra.*

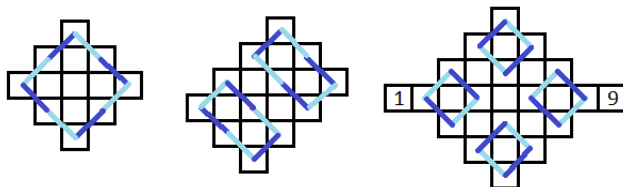


7. ábra. Három különböző, 8-tórusz jó párosítás  $\mathcal{H}_9$ -re



8. ábra. Egy 16-tórusz jó párosítás  $\mathcal{H}_9$ -re

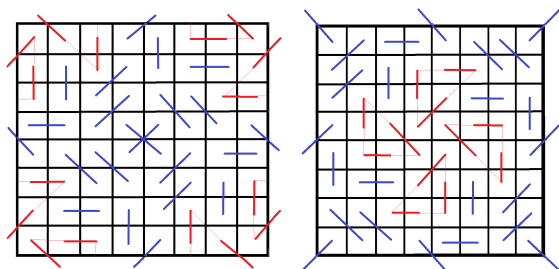
3.2. TÉTEL. [5] Egy 8-tóruszos jó párosításból akkor és csak akkor származtatható 16-tóruszos jó párosítás, ha létezik egy másik, különböző 8-tóruszos jó párosítás, mely csak néhány átlós dominóban különbözik az elsőtől úgy, hogy az uniójuk egy átlós alternáló körrendszert ad. Összesen két ilyen lehetséges alternáló körrendszer fordulhat elő, melyek a 9. ábra bal oldalán és közepén láthatók, világossal jelölve az alternatív párok.



9. ábra. Lehetséges alternáló körrendszerek

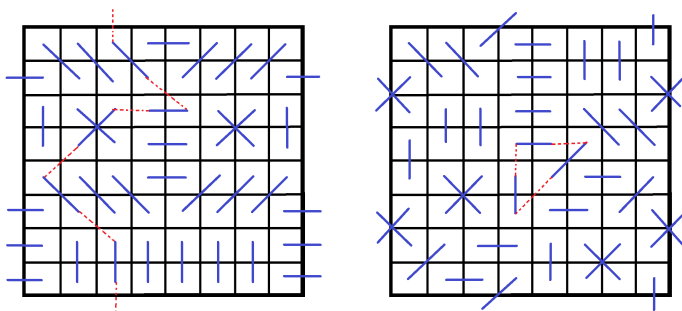
Mivel minden 16-tóruszos jó párosítás két átlós körökben eltérő 8-tóruszosból származik, a továbbiakban csak a 8-tóruszos párosításokkal foglalkozunk. Egy 8-tóruszos párosítás jó párosítás a 8-tórusz játékra is, ahol a játék táblája a 8-tórusz, élei pedig a 8 hosszú halmazok vízszintesen, függőlegesen és átlósan. Fordítva nem feltétlenül igaz, hiszen a 8-tórusz játék jó párosításai között lehetnek nem dominókat tartalmazók is. Ha azonban csak dominókat tartalmazó párosításokat veszünk, a kapcsolat kétirányú.

Programmal megvizsgáltuk [6], hány különböző jó párosítás létezik. A válasz egy elég nagy prímszám lett: 194543. A keresés során nem csak a párosítások megtalálása okozott nehézségeket, hanem a kapott objektumok megkülönböztetése is. Olykor két nagyon különbözőnek tűnő párosításról is kiderülhet, hogy izomorfak, ld. 10. ábra, ahol a jobb oldali ábrán vékony vonalakkal kiemeltünk négy darab háromszöget, melyek a bal oldali ábrán is beazonosíthatók.



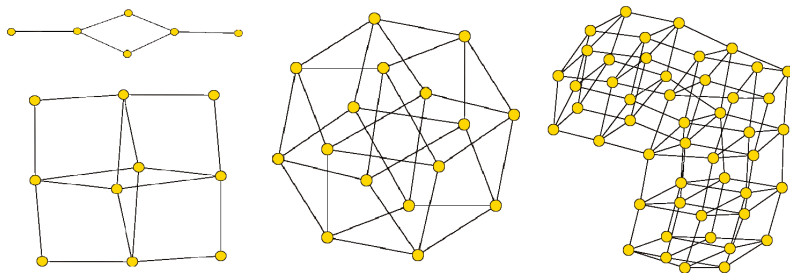
10. ábra. Két eltérőnek tűnő, de izomorf párosítás

A párosítások között egy természetes kapcsolat definiálható: ha egy párt irányban eltolunk egy mezővel, akkor persze keletkezik egy üres mező ill. egy olyan, amibe két pár is belelóg (ami lehetetlen egy jó párosításban). Azonban, ha a dupla mezőről továbbtoljuk a másik párt, és ezt addig ismételjük, amíg körbeér (mivel 64 mezőnk van csak, biztosan körbe fog), akkor egy másik jó párosítást kapunk, pl. 11. ábra. Így a kapcsolat segítségével egy gráfot is definiálhatunk, melynek csúcsai az összesen 194543 darab párosítás, melyeket akkor kötünk össze, ha létezik köztük eltolás kapcsolat.



11. ábra. Két példa az eredeti párosításokból kapható, eltolt piros (szaggatott) éleket is tartalmazó új párosításokra

Az így kapott gráf majdnem összefüggő, 194333 csúcsa ugyanabban az összefüggő komponensben található. Azonban akad néhány kisebb komponens is, melyek között a 4-dimenziós kocka hálója is felbukkan, ld. a 12. ábra közepén. A gráf háromszögmentes és összes feszített köre négy hosszú. 14 komponensből áll, fokszámai 1 és 11 között változnak, az átlagfokszám 5,47.



12. ábra. Néhány kisebb komponense a gráfnak

Hasonlóan a hatszögrácson is megszámolhatjuk a párosításokat ill. felépíthetjük a gráfot. Ekkor azt kapjuk, hogy 26 különböző jó párosítás van, melyek egy összefüggő gráfot adnak.

#### 4. összefoglalás

A cikkben hipergráf játékokkal foglalkoztunk. Ismertettük a lehetséges nyerő stratégiákat, majd áttekintettük az Amőba különböző változataira adott eredményeket. Megemlítettük, hogy a hagyományos, 4-irányú  $k$ -amőba Maker-Breaker játékban a  $k = 6$  és  $k = 7$  esetek a mai napig nyitott kérdések. Hasonlóan nyitottak a 3-irányú  $k$ -amőba  $k = 5$  és  $k = 6$  esetei. A cikk további részében a 9-amőba lehetséges párosításaival foglalkoztunk, melyek mindegyike 8- illetve 16-tóruszos szimmetriákkal rendelkezik. Utóbbiakból mindegyik két különböző 8-tóruszos párosításból kapható, előbbiekből pedig programmal 194543 darab különbözőt kaptunk. A párosítások között egy kézenfekvő kapcsolatot találva gráfba rendeztük mind a 194543 párosítást, mely gráf tulajdonságait szintén leírtuk.

#### Köszönetnyilvánítás

Jelen kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal az SNN-117879 sz. pályázatával támogatta, valamint az EFOP-3.6.1-16-2016-00008 azonosítójú, EU társfinanszírozású projekt részben támogatta.

#### Hivatkozások

- [1] L.V. ALLIS, H.J. VAN DEN HERIK AND M. P. HUNTJENS: *Go-Moku solved by new search techniques*, Proc. 1993 AAAI Fall Symp. on Games: Planning and Learning, AAAI Press Tech. Report FS93-02, pp. 1-9 (1993). DOI: [10.1111/j.1467-8640.1996.tb00250.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8640.1996.tb00250.x)
- [2] J. BECK: *Combinatorial Games, Tic-Tac-Toe Theory*, Cambridge University Press (2008). DOI: [10.1017/CBO9780511735202](https://doi.org/10.1017/CBO9780511735202)
- [3] A. CSERNENSZKY, R. MARTIN AND A. PLUHÁR: *On the Complexity of Chooser-Picker positional games*, Integers, Vol. **12**, pp. 427-444 (2011). DOI: [10.1515/integ.2011.113](https://doi.org/10.1515/integ.2011.113)
- [4] P. ERDŐS AND J.L. SELFRIDGE: *On a combinatorial problem which is complete in polynomial space*. Journal of Combinatorial Theory Series A, Vol. **14**, pp. 298-301 (1973). DOI: [10.1016/0097-3165\(73\)90005-8](https://doi.org/10.1016/0097-3165(73)90005-8)
- [5] L. GYÖRFFY, G. MAKAY AND A. PLUHÁR: *Pairing strategies for the 9-in-a-row game*, Ars Mathematica Contemporanea, Vol. **16**, pp. 97-109 (2019). DOI: [10.26493/1855-3974.1350.990](https://doi.org/10.26493/1855-3974.1350.990)
- [6] L. GYÖRFFY, G. MAKAY AND A. LONDON: *The structure of pairing strategies for  $k$ -in-a-row type games*, Acta Cybernetica, Vol. **23**, pp. 561-572 (2017). DOI: [10.14232/acta-cyb.23.2.2017.8](https://doi.org/10.14232/acta-cyb.23.2.2017.8)
- [7] A.W. HALES AND R.I. JEWETT: *Regularity and positional games*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. **106**, pp. 222-229 (1963). DOI: [10.1090/S0002-9947-1963-0143712-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1963-0143712-1)

- [8] K. KRUCZEK AND E. SUNDBERG: *A pairing strategy for Tic-Tac-Toe on the integer lattice with numerous directions*, Electronic J. Combinatorics, Vol. **15** No. **1** (2008). DOI: [10.37236/917](https://doi.org/10.37236/917)
- [9] PLUHÁR ANDRÁS: *Pozíciós játékok*, Sigma, Vol. **3-4**, pp. 111-130 (2007).



Györfy Lajos 1989-ben született Bonyhádön, ahol középiskolai tanulmányait is végezte Katz Sándor irányításával. Mesterszakos diplomáját 2013-ban szerezte a Szegedi Tudományegyetem Alkalmazott Matematikus szakán, majd 2019-ben PhD fokozatot szerzett matematikusként, Pluhár András vezetésével. 2018-ban a Szegedi Akadémiai Bizottság fiatal kutatóknak szánt pályázatán I. helyezést ért el. Jelenleg a Bolyai Intézet kutatója, ahol kombinatorikus játékok témában kutat. Öt nemzetközi folyóiratban megjelent publikációja van.

Dr. Györfy Lajos  
SZTE Bolyai Intézet,  
6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.  
lgyorffy@math.u-szeged.hu

## PAIRING STRATEGIES ON POSITIONAL GAMES

LAJOS GYÖRFFY

Positional games are one of the most beautiful topics in mathematics. However, while some questions are interesting for a primary school student, certain answers are hidden even for the best mathematicians. The most well-known games are the Tic-Tac-Toe and the 5-in-a-row, although there are some other worthwhile examples. In this paper we show some winning strategies, then we characterize all pairing strategies of the 9-in-a-row game and give a full description to the highly symmetric structure of those pairings, in which we will meet the three-dimensional cube, as well.

*Keywords:* Pairing Strategies, Positional Games, k-in-a-row

*Mathematics Subject Classification* (2000): 05C65, 05C15



## LINEÁRIS PROGRAMOK A MAXIMÁLIS ÉLSÚLYÚ KLIKK PROBLÉMÁRA

SZABÓ SÁNDOR, SZTOJKOVICS DÓRA

Egy adott gráfban a maximális élsúlyú klikk megtalálása egy ismert és fontos probléma, sok alkalmazással. A probléma megoldására léteznek a lineáris programozás eszközeit, valamint lineáris programozással nem kapcsolatos kombinatorikus alapú, keresési fát használó algoritmusok is. Egy olyan tanulmányhoz [6] fűzünk megjegyzéseket, amelyben a szerzők egy kombinatorikus alapú algoritmust hasonlítottak össze kettő lineáris programozás, és egy kvadratikusan programozás alapú algoritmussal. Az [1] és [6] cikkben szereplő egyik programot módosítjuk. A módosításokhoz a gráf csúcsainak és éleinek színezésével jutunk. Az új programokat numerikus kísérletekben teszteltük.

### 1. Bevezetés

Legyen  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , egy véges, egyszerű, irányítatlan gráf. Tekintsük  $V$ -nek egy  $C \subseteq V$  részhalmazát.  $C$  klikk  $G$ -ben, ha bármely két csúcsa között fut él, azaz minden  $v_i, v_j \in C$  ( $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ ) esetén  $\{v_i, v_j\} \in E$ . Ha  $|C| = k$ , akkor azt mondjuk, hogy  $C$  egy  $k$ -klikk.  $C$  maximum klikk  $G$ -ben, ha minden  $K \subseteq V$  klikk esetén  $|K| \leq |C|$ . Ekkor a klikk méretét (csúcsainak számát) az  $\omega(G)$  szimbólummal jelöljük és a  $G$  klikkszámának nevezzük. Ha  $\omega(G) = k$ , akkor a klikk éleinek száma  $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ .  $C$  maximális klikk  $G$ -ben, ha tovább nem bővíthető, azaz bármely  $v_i \in V, v_i \notin C$  csúcsot hozzávéve  $C$ -hez a kapott  $C \cup \{v_i\}$  halmaz már nem alkot klikket. A definícióból következik, hogy minden maximum klikk maximális, de nem minden maximális klikk maximum klikk.

$G$  gráf minden  $\{u, v\} \in E$  éléhez rendeljük hozzá egy  $w_e(u, v)$  nemnegatív értéket, így egy élsúlyozott gráfot kapunk. Keressünk  $G$ -ben egy olyan klikket, amelyben az élek súlyának összege maximális. Ez egy sokat vizsgált NP-nehéz probléma fontos alkalmazásokkal ([4], [5], [7], [8]), amit maximális élsúlyú klikk problémának nevezünk. A [6] cikkben a szerzők mutatnak egy olyan kombinatorikus alapú algoritmust, amely gyorsabban számolt az általuk tesztelt gráfokon, mint más, lineáris programozás alapú algoritmusok. Célunk a cikkben mutatott vegyes-egészértékű program módosítása volt, amihez lokális csúcsszínezést és él-színezést, valamint globális élszínezést használtunk.

### 1.1. Csúcsszínezés

Színezzük ki  $G$  gráf csúcsait úgy, hogy a következő feltételek teljesüljenek:

1. Minden csúcsnak pontosan egy színe van.
2. Élrel összekötött csúcsok különböző színűek.

Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor a csúcsok jó színezéséről beszélünk. Tegyük fel, hogy  $G$  csúcsai  $k$  színnel jól színezhetők, de  $k - 1$  színnel már nem. Ekkor a  $k$  számot  $G$  kromatikus számának nevezzük, és  $\chi(G)$  szimbólummal jelöljük.  $\chi(G)$  meghatározása egy NP-nehez optimalizálási probléma.

### 1.2. Élszínezés

Színezzük ki  $G$  gráf éleit úgy, hogy teljesüljenek az alábbi feltételek:

1. Minden élnek pontosan egy színe van.
2.  $G$ -ben bármely háromszög (3-klikk) mindhárom éle különböző színű.
3.  $G$ -ben bármely teljes négyszög (4-klikk) mind a hat éle különböző színű.

Ha ezek a kritériumok teljesülnek, akkor az élek élesített<sup>1</sup> jó színezéséről beszélünk. Az élek jó színezése egy ismert fogalom, amit akkor használunk, ha az egy közös csúcsra illeszkedő élek különböző színűek. A mi esetünkben egy csúcsra illeszkedhetnek azonos színű élek is.

A [6] cikk szerzői olyan vegyes-egészértékű programot használtak az összehasonlításban, melyben a változók egy része bináris volt. Mi olyan szempontból vizsgáltuk a programot, hogy a lineáris relaxációja, amelyben a bináris változóknak megengedjük, hogy tetszőleges 0 és 1 közötti valós értéket vegyenek fel, mennyire közelíti jól az optimumot. Az így kapott lineáris programot a vegyes-egészértékű program lineáris relaxációjának nevezzük. Egy egészértékű vagy vegyes-egészértékű program összes megengedett megoldása a lineáris relaxációjának is megengedett megoldása lesz. Egy maximum probléma esetén az egészértékű vagy vegyes-egészértékű program lineáris relaxációjának optimum értéke mindig felső becslést ad az eredeti program optimum értékére.

Az [1] és [6] cikkekben használt egészértékű és vegyes-egészértékű programok lineáris relaxációinál szeretnénk erősebb lineáris relaxációkat kapni. A lineáris relaxációk összehasonlításának két módszerét használjuk, egy elméleti jellegű és egy numerikus számolásokon alapuló módszert:

<sup>1</sup>Az élesített itt nem azt jelenti, hogy javított, vagy erős, hanem azt, hogy az élszínek különbözőségét a 3- és 4-klikkek élei alapján követeljük meg.

1. Ellenőrizzük (ahol ez lehetséges), hogy az egyik lineáris program megengedett megoldásainak halmaza tartalmazza-e a másik lineáris program megengedett megoldásainak halmazát.
2. Gondosan választott tesztfeladatok esetén azt tapasztaljuk, hogy az új megfogalmazás tipikusan jobb felső becsléseket ad, mint a régi.

## 2. Egészértékű programok a maximum klikk problémára a szakirodalomból

A maximális élsúlyú klikk probléma megoldása előtt tekintsünk olyan egészértékű programokat, amelyek megoldják a maximum klikk problémát.

Legyen  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  továbbra is egy véges, egyszerű, irányítatlan gráf. Mutatunk három lineáris programozás alapú algoritmust, amelyek megadják  $G$ -ben a maximum klikket. Ezekben az egészértékű programokban nem vesszük figyelembe az élsúlyokat.

### 2.1. Él átfogalmazás

Legyen  $C$  egy klikk  $G$ -ben, és vezessük be az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  döntési változókat. A változók száma megegyezik  $G$  csúcsainak számával. Az  $x_i$  változó értéke 1, ha  $v_i$  szerepel a klikkben ( $1 \leq i \leq n$ ), 0 különben:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_i \in C, \\ 0, & \text{ha } v_i \notin C. \end{cases}$$

Ekkor a célfüggvény a következő alakban írható:

$$\sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \max.$$

Ez maximalizálni fogja a csúcsok számát. Két változó összege akkor és csak akkor lehet 2-vel egyenlő, ha a megfelelő csúcsok elemei  $C$ -nek, ekkor össze vannak kötve éllel. Így, ha két csúcs között nem fut él, akkor mindkettő nem szerepelhet egy klikkben, és a megfelelő változók összege legfeljebb 1 lehet. A feltételek a következők:

$$x_i + x_j \leq 1, \quad \text{ha } \{v_i, v_j\} \notin E.$$

Az él átfogalmazással kapott egészértékű program:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximum:} & \sum_{i=1}^n x_i & (1.1) \\ \text{feltételek:} & x_i + x_j \leq 1, \quad (v_i, v_j) \notin E & (1.2) \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad v_i \in V. & (1.3) \end{array} \right\} (1)$$

A következő két formálisabb állítás bizonyítása kiolvasható a fenti megfontolásokból.

Legyen  $U \subseteq V$ . Defináljuk az  $\underline{\alpha}^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  vektort úgy, hogy

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_i \in U, \\ 0, & \text{ha } v_i \notin U. \end{cases}$$

Az  $\underline{\alpha}^T$  vektort az  $U$  karakterisztikus vektorának nevezzük.

2.1. ÁLLÍTÁS. Ha  $C \subseteq V$  klikk  $G$ -ben, akkor  $C$  karakterisztikus vektora,  $\underline{\alpha}^T$ , megengedett megoldása (1)-nek.

2.2. ÁLLÍTÁS. Ha  $\underline{\alpha}^T$  megengedett megoldása (1)-nek, és  $\underline{\alpha}^T$  a  $C \subseteq V$  karakterisztikus vektora, akkor  $C$  klikk  $G$ -ben.

## 2.2. Független halmaz átfoglalmazás

A független halmaz átfoglalmazás célfüggvénye és a változói ugyanazok, mint az él átfoglalmazás esetén. Legyen  $I \subseteq V$  olyan halmaz, amelyben semelyik két csúc között nem fut él, azaz minden  $v_i, v_j \in I$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) esetén  $(v_i, v_j) \notin E$ . Ekkor azt mondjuk, hogy  $I$  független halmaz. Ha minden  $J \subseteq V$  független halmazra  $|J| \leq |I|$ , akkor  $I$  maximum független halmaz.  $I$  maximális független halmaz, ha tovább nem bővíthető, azaz, ha bármely  $v_i \in V, v_i \notin I$  csúcsot hozzávéve  $I$ -hez a kapott  $I \cup \{v_i\}$  halmaz már nem független. Minden maximum független halmaz maximális, de egy maximális független halmaz nem feltétlenül maximum független halmaz.

Egy független halmazban semelyik két csúc között sem fut él, ezért a halmaz elemei közül legfeljebb egy csúc szerepelhet egy klikkben:

$$\sum_{v_i \in I} x_i \leq 1, \quad \text{ahol } I \text{ maximális független halmaz.}$$

A független halmaz átfoglalmazással kapott egészértékű program:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximum:} & \sum_{i=1}^n x_i & (2.1) \\ \text{feltételek:} & \sum_{v_i \in I} x_i \leq 1, \quad I \text{ maximális független halmaz} & (2.2) \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad v_i \in V. & (2.3) \end{array} \right\} (2)$$

A következő két állítás indoklása hasonlít a 2.1. és 2.2. Állítások igazolásához.

2.3. ÁLLÍTÁS. Ha  $C \subseteq V$  klikk  $G$ -ben, akkor  $C$  karakterisztikus vektora,  $\underline{\alpha}^T$ , megengedett megoldása (2)-nek.

2.4. ÁLLÍTÁS. Ha  $\underline{\alpha}^T$  megengedett megoldása (2)-nek, és  $\underline{\alpha}^T$  a  $C \subseteq V$  karakterisztikus vektora, akkor  $C$  klikk  $G$ -ben.

A maximális független halmazok előállításához egy NP-nehez feladatot kell megoldani, és így a független halmaz átfogalmazás nem tűnik gyakorlatilag kivitelezhetőnek. A helyzet ennél árnyaltabb. Amikor a  $G$  gráfnak sok éle van, akkor a független halmazok felsorolása megoldható a Bronn-Kerbosch algoritmus-sal. Amikor  $G$ -nek kevés éle van, akkor a maximum klikk probléma oldható meg elfogadható ráfordítással.

### 2.3. A Croce-Tadei átfogalmazás

Az átfogalmazás megtalálható az [1] cikkben. A célfüggvényt és változókat az előző esetekhez hasonlóan kapjuk.

Legyen  $\overline{N}(v_i)$  azon csúcsok halmaza, amelyek nem szomszédai  $v_i$ -nek  $G$ -ben, azaz  $\overline{N}(v_i) = \{u : \{v_i, u\} \notin E, u \in V\}$ . Jelölje  $\overline{N}_i$  a  $v_i$  csúcs nemszomszédainak számát,  $\overline{N}_i = |\overline{N}(v_i)|$ . Ha  $v_i$  eleme a  $C$  klikknek, akkor  $\overline{N}(v_i)$  halmaz semelyik eleme nem szerepelhet a klikkben, amit a következő feltételekkel írhatunk le:

$$\overline{N}_i x_i + \sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} x_j \leq \overline{N}_i.$$

Ez az egyenlőtlenség a 2.1. alfejezetbeli (1) egészértékű program egyenlőtlenségei közül a  $v_i$ -re illeszkedő nem-élekhez tartozóknak az összege. A Croce-Tadei átfogalmazással kapott egészértékű program:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximum :} & \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.1) \\ \text{feltételek:} & \overline{N}_i x_i + \sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} x_j \leq \overline{N}_i, \quad v_i \in V \quad (3.2) \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad v_i \in V. \quad (3.3) \end{array} \right\} (3)$$

2.5. ÁLLÍTÁS. Ha  $C \subseteq V$  klikk  $G$ -ben, akkor  $C$  karakterisztikus vektora,  $\underline{\alpha}^T$ , megengedett megoldása (3)-nak.

*Bizonyítás.* Legyen  $C$  klikk  $G$ -ben, és tegyük fel indirekt módon, hogy  $\underline{\alpha}^T$  nem megengedett megoldás, azaz létezik olyan  $1 \leq i \leq n$ , amire

$$\overline{N}_i \alpha_i + \sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} \alpha_j \geq \overline{N}_i + 1.$$

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy  $\alpha_i = 0$  vagy  $\alpha_i = 1$ .

1. eset: Ha  $\alpha_i = 0$ , akkor azt az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} \alpha_j \geq \overline{N}_i + 1.$$

$\alpha_j$  értéke legfeljebb 1 lehet, és  $|\overline{N}(v_i)| = \overline{N}_i$ , innen következik, hogy

$$\sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} \alpha_j \leq \overline{N}_i.$$

Ellentmondásra jutottunk.

2. eset: Ha  $\alpha_i = 1$ , akkor azt kapjuk, hogy

$$\overline{N}_i + \sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} \alpha_j \geq \overline{N}_i + 1.$$

Mindkét oldalból kivonva  $\overline{N}_i$ -t a

$$\sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} \alpha_j \geq 1$$

egyenlőtlenség adódik. Ekkor létezik  $1 \leq k \leq n$ , amelyre  $v_k \in \overline{N}(v_i)$ , azaz  $\{v_i, v_k\} \notin E$  és  $\alpha_k = 1$ . Mivel  $\alpha_i = 1$  és  $\alpha_k = 1$ , ezért  $v_k \in C$  és  $v_i \in C$ .  $C$  klikk, ezért  $\{v_i, v_k\} \in E$ . Ellentmondásra jutottunk.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

2.6. ÁLLÍTÁS. Ha  $\underline{\alpha}^T$  megengedett megoldása (3)-nak, és  $\underline{\alpha}^T$  a  $C \subseteq V$  karakterisztikus vektora, akkor  $C$  klikk  $G$ -ben.

*Bizonyítás.* Legyen  $\underline{\alpha}^T$  megengedett megoldása (3)-nak, és tegyük fel indirekt módon, hogy  $C$  nem klikk  $G$ -ben. Ekkor létezik  $1 \leq i, k \leq n$ ,  $i \neq k$ , amire  $v_i, v_k \in C$ , de  $\{v_i, v_k\} \notin E$ . Következik, hogy  $\alpha_i = 1$ ,  $\alpha_k = 1$  és  $v_k \in \overline{N}(v_i)$ .  $\underline{\alpha}^T$  megengedett megoldás, ezért az

$$\overline{N}_i \alpha_i + \sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} \alpha_j \leq \overline{N}_i$$

feltétel teljesül. Behelyettesítve  $\alpha_i$  és  $\alpha_k$  értékeit azt kapjuk, hogy

$$\overline{N}_i + 1 + \sum_{v_j \in \overline{N}(v_i), j \neq k} \alpha_j \leq \overline{N}_i.$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget

$$\sum_{v_j \in \overline{N}(v_i), j \neq k} \alpha_j \leq -1$$

adódik. Ellentmondásra jutottunk, mivel az összeg minden tagja nemnegatív. Ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

A három egészértékű program ekvivalens egymással abban az értelemben, hogy ugyanazok a megengedett megoldásaik és az optimum értékeik.

Az él átfogalmazásban  $\mathcal{O}\left(\binom{n}{2} - |E|\right) = \mathcal{O}(n^2)$  feltétel jelenik meg. Vannak olyan  $n$  csúcsú gráfok, amelyek  $\mathcal{O}(2^n)$  maximális klikket tartalmaznak, és olyanok, melyekben  $\mathcal{O}(2^n)$  független halmaz található [3]. Ezeknél a gráfnál, ha a független halmaz átfogalmazással szeretnénk megtalálni a maximum klikket, akkor nagyon sok feltételt kapunk az egészértékű programban. Ezekkel szemben a Croce-Tadei átfogalmazás csak  $n$  feltételt tartalmaz, melyeket könnyen meghatározhatunk a szomszédsági mátrixból.

A maximális élsúlyú klikk probléma megoldására egy lehetőség, hogy a fenti programokat további feltételekkel egészítjük ki. A [6] cikkben a szerzők az él átfogalmazást bővítették újabb egyenlőtlenségekkel. A Croce-Tadei átfogalmazásban általában kevesebb feltétel szerepel, ezért ezt fogjuk használni az él átfogalmazás helyett.

### 3. A maximális élsúlyú klikk probléma

A maximális élsúlyú klikk probléma megoldására a [6] cikkben kettő lineáris programozás alapú, egy kvadratikus programozás alapú és egy kombinatorikus alapú algoritmust mutatnak a szerzők. A tesztelt gráfok esetén a leggyorsabb algoritmus a kombinatorikus alapú volt, amit a vegyes-egészértékű program követett. Ennek a módosításával foglalkoztunk.

Legyen  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , egy véges, egyszerű, irányítatlan gráf, ahogy eddig is. Jelölje  $N(v_i)$  azon csúcsok halmazát, amelyek szomszédai  $v_i \in V$ -nek. Legyen  $N^+(v_i) = N(v_i) \cap \{v_j : j > i\}$ , és legyen  $U_i = \sum_{v_j \in N^+(v_i)} w_e(v_i, v_j)$ .

#### 3.1. Vegyes-egészértékű program [6]

A következő vegyes-egészértékű program optimális megoldása megadja a maximális élsúlyú klikket  $G$ -ben:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{maximum:} \quad & \sum_{i=1}^{n-1} z_i & (4.1) \\
 \text{feltételek:} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \{v_i, v_j\} \notin E & (4.2) \\
 & z_i \leq U_i x_i, \quad v_i \in V \setminus \{v_n\} & (4.3) \\
 & z_i \leq \sum_{v_j \in N^+(v_i)} w_e(v_i, v_j) x_j, \quad v_i \in V \setminus \{v_n\} & (4.4) \\
 & x_i \in \{0, 1\}, \quad v_i \in V. & (4.5)
 \end{aligned} \right\} (4)$$

A (4) vegyes-egészértékű program az él átfogalmazás kiegészítése a (4.2), (4.3) feltételekkel, új célfüggvénnyel és a  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  változókkal. A célfüggvény az  $n - 1$  darab új változó összegének a maximuma:

$$\sum_{i=1}^{n-1} z_i \rightarrow \max.$$

Legyen  $C \subseteq V$  klikk  $G$ -ben és  $\underline{\alpha}^T$  a  $C$  karakterisztikus vektora. Legyen  $\underline{\beta}^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ , ahol  $\beta_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) értéke nem nagyobb, mint a  $v_i$  csúcsból az  $i$ -nél nagyobb indexű  $C$ -beli csúcsokba futó élek súlyának összege, ha  $v_i \in C$ , ellenkező esetben pedig legfeljebb 0:

$$\beta_i \leq \begin{cases} \sum_{v_j \in N^+(v_i) \cap C} w_e(v_i, v_j), & \text{ha } v_i \in C, \\ 0, & \text{ha } v_i \notin C. \end{cases}$$

Ekkor a  $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i$  összeg maximuma a  $C$  klikk élsúlyainak összegével egyezik meg.

3.1. ÁLLÍTÁS. Az  $(\underline{\alpha}^T, \underline{\beta}^T)^T$  vektor megengedett megoldása (4)-nek.

*Bizonyítás.* A 2.1. Állítás kimondja, hogy ha  $C$  klikk  $G$ -ben akkor, a (4.2) feltételek teljesülnek.

Tekintsük a (4.3) feltételeket. Ha  $v_i \in C$ , akkor

$$\beta_i \leq \sum_{v_j \in N^+(v_i) \cap C} w_e(v_i, v_j) \quad \text{és} \quad U_i \alpha_i = \sum_{v_j \in N^+(v_i)} w_e(v_i, v_j).$$

$(N^+(v_i) \cap C) \subseteq N^+(v_i)$  és a súlyok nemnegatívak, ezért  $\beta_i \leq U_i \alpha_i$ . Ha  $v_i \notin C$ , akkor  $\beta_i \leq 0$  és  $U_i \alpha_i = 0$ , tehát az egyenlőtlenség ebben az esetben is teljesül.

Tekintsük a (4.4) feltételeket. Ha  $v_i \in C$ , akkor

$$\beta_i \leq \sum_{v_j \in N^+(v_i) \cap C} w_e(v_i, v_j) = \sum_{v_j \in N^+(v_i)} w_e(v_i, v_j) \alpha_j.$$



Ha  $v_i \notin C$ , akkor  $\beta_i \leq 0$ , a jobb oldalon pedig egy nemnegatív érték szerepel, tehát az egyenlőtlenség mindkét esetben teljesül.  $\square$

**3.2. ÁLLÍTÁS.** Ha  $(\underline{\alpha}^T, \underline{\beta}^T)^T$  megengedett megoldása (4)-nek, akkor az  $\underline{\alpha}^T$  karakterisztikus vektorhoz tartozó  $C \subseteq V$  halmaz klikk  $G$ -ben, valamint ha  $v_i \in C$ , akkor

$$\beta_i \leq \sum_{v_j \in N^+(v_i) \cap C} w_e(v_i, v_j),$$

és  $\beta_i \leq 0$ , ha  $v_i \notin C$ .

*Bizonyítás.* A 2.2. Tételből következik, hogy a (4.2) feltételek miatt  $C$  klikk  $G$ -ben.

Ha  $v_i \notin C$ , akkor a (4.3) feltételekből adódik, hogy  $\beta_i \leq 0$ , a (4.4) egyenlőtlenségekből pedig következik, hogy

$$\beta_i \leq \sum_{v_j \in N^+(v_i)} w_e(v_i, v_j) \alpha_j.$$

A két korlát körül az első erősebb, ezért  $\beta_i \leq 0$  teljesül.

Ha  $v_i \in C$ , akkor a (4.3) egyenlőtlenségekből azt kapjuk, hogy  $\beta_i \leq U_i$ , és a (4.4) feltételekből következik, hogy

$$\beta_i \leq \sum_{v_j \in N^+(v_i)} w_e(v_i, v_j) \alpha_j = \sum_{v_j \in N^+(v_i) \cap C} w_e(v_i, v_j).$$

Mivel

$$\sum_{v_j \in N^+(v_i) \cap C} w_e(v_i, v_j) \leq \sum_{v_j \in N^+(v_i)} w_e(v_i, v_j) = U_i,$$

ezért

$$\beta_i \leq \sum_{v_j \in N^+(v_i) \cap C} w_e(v_i, v_j).$$

$\square$

A tételekből következik, hogy az optimális megoldás megadja a  $G$ -beli maximális élsúlyú klikket.

#### 4. Új matematikai programok a maximális élsúlyú klikk problémára

Ebben a fejezetben a (4) vegyes-egészértékű program (4.2) és (4.3) feltételein módosítunk. A Croce-Tadei egyenlőtlenségek esetén, ha  $x_i = 0$ , akkor az  $i$ -edik

feltétel megengedi, hogy  $v_i$  bármelyik nemszomszédját bevegyük a klikkbe. Ennek az egyenlőtlenségnek a módosítására több lehetőségünk is van.

A [6]-ban szereplő (4) program helyett az alábbi programot fogjuk használni.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximum:} & \sum_{i=1}^{n-1} z_i \quad (5.1) \\ \text{feltételek:} & C_i x_i + \sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} x_j \leq C_i, \quad v_i \in V \quad (5.2) \\ & z_i \leq M_i x_i, \quad v_i \in V \setminus \{v_n\} \quad (5.3) \\ & z_i \leq \sum_{v_j \in N^+(v_i)} w_e(v_i, v_j) x_j, \quad v_i \in V \setminus \{v_n\} \quad (5.4) \\ & \sum_{i=1}^n x_i \leq S \quad (5.5) \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad v_i \in V. \quad (5.6) \end{array} \right\} (5)$$

$C_i$  megválasztását a 4.1. és a 4.2. alfejezetekben,  $M_i$  választását a 4.3. alfejezetben,  $S$  választását pedig a 4.4. alfejezetben fogjuk részletezni.

#### 4.1. Az (5.2) korlátban a $C_i$ megválasztása lokális csúcsszínezéssel

Tekintsük a Croce-Tadei egyenlőtlenségek  $i$ -edik csúcsra vonatkozó (3.2) feltételét, és színezzük ki  $v_i$  nemszomszédait jól. Alkalmazzuk a mohó színezőt: az első csúcs színe legyen 1. A második csúcs színe is legyen 1, ha nem szomszédja az elsőnek és 2, ha szomszédja. Tegyük fel, hogy kiszíneztünk  $k$  csúcsot  $s$  színnel jól. Tekintsük azt a legkisebb színszámú színosztályt, amelyben egyik csúcs sem szomszédja  $v_{k+1}$ -nek. Ha van ilyen, akkor  $v_{k+1}$  is bekerül ebbe a színosztályba, ha nincs, akkor  $v_{k+1}$  színe legyen  $s + 1$ . Mivel egy klikkben bármely két csúcs között fut él, ezért minden csúcs különböző színű lesz. Így a színosztályok száma felső becslést ad a maximum klikk méretére.

A következő állításokban azt fogjuk megmutatni, hogy az eredeti (4) vegyes-egészértékű program

- (4.2) feltételét lecserélhetjük az (5.2) feltételre. Az így kapott programot jelöljük (6)-tal.
- (4.3) feltételét lecserélhetjük az (5.3) feltételre. Az így kapott programot jelöljük (7)-tel.

Legyen  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , egy véges, egyszerű, irányítatlan gráf. Színezzük ki minden csúcs esetén a csúcs nemszomszédjaiból álló részgráfot a fenti színezéssel. Jelölje  $C_i$  a  $v_i$  nemszomszédai által kifesztett részgráf esetén kapott felső becslést a részgráfban található maximum klikk méretére. A Croce-Tadei egyenlőtlenségek  $i$ -edik feltételét úgy élesíthetjük, ha  $\overline{N}_i$  helyére  $C_i$ -t írunk.

Jelölje  $\bar{\omega}_i$  az  $i$ -edik csúcs nemszomszédai által kifeszített  $G$ -beli részgráfban található maximum klikk méretét.  $C_i$  felső becslés a klikkméretre, ezért  $\bar{\omega}_i \leq C_i$ .

4.1. ÁLLÍTÁS. Legyen  $C \subseteq V$  karakterisztikus vektora  $\underline{\alpha}^T$ , és legyen  $\underline{\beta}^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ , ahol minden  $1 \leq i \leq n-1$  esetén

$$\beta_i \leq \sum_{v_j \in N^+(v_i) \cap C} w_e(v_i, v_j),$$

ha  $v_i \in C$ , valamint  $\beta_i \leq 0$ , ha  $v_i \notin C$ . Ha  $C$  klikk  $G$ -ben, akkor  $(\underline{\alpha}^T, \underline{\beta}^T)^T$  megengedett megoldása (6)-nak.

*Bizonyítás.* Legyen  $C$  klikk  $G$ -ben, és tegyük fel indirekt módon, hogy  $(\underline{\alpha}^T, \underline{\beta}^T)^T$  nem megengedett megoldás. A 3.1. Állításból következik, hogy a (4.3) és (4.4) egyenlőtlenségek teljesülnek, tehát az (5.2) feltételek között létezik olyan  $1 \leq i \leq n$ , amire

$$C_i \alpha_i + \sum_{v_j \in \bar{N}(v_i)} \alpha_j \geq C_i + 1.$$

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy  $\alpha_i = 0$  vagy  $\alpha_i = 1$ .

1. eset: Ha  $\alpha_i = 0$ , akkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\sum_{v_j \in \bar{N}(v_i)} \alpha_j \geq C_i + 1.$$

$\bar{\omega}_i \leq C_i$  miatt

$$\sum_{v_j \in \bar{N}(v_i)} \alpha_j \geq \bar{\omega}_i + 1.$$

Tekintsük a  $C \cap \bar{N}(v_i)$  halmazt. Mivel  $C$  klikk, a halmaz részhalmazai is klikket alkotnak, és az elemek száma nem nagyobb, mint az  $\bar{N}(v_i)$  által kifeszített  $G$ -beli részgráfban található maximum klikk mérete:  $|C \cap \bar{N}(v_i)| \leq \bar{\omega}_i$ .  $|C \cap \bar{N}(v_i)| =$

$\sum_{v_j \in \bar{N}(v_i)} \alpha_j$ , ezért azt kapjuk, hogy

$$\sum_{v_j \in \bar{N}(v_i)} \alpha_j \leq \bar{\omega}_i.$$

Ellentmondásra jutottunk.

2. eset: Ha  $\alpha_i = 1$ , akkor a következő egyenlőtlenség adódik:

$$C_i + \sum_{v_j \in \bar{N}(v_i)} \alpha_j \geq C_i + 1.$$

Mindkét oldalból kivonva  $C_i$ -t

$$\sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} \alpha_j \geq 1$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ekkor létezik  $1 \leq k \leq n$ , amire  $\alpha_k = 1$  és  $v_k \in \overline{N}(v_i)$ , azaz  $\{v_i, v_k\} \notin E$ . Mivel  $\alpha_i = 1$  és  $\alpha_k = 1$ , ezért  $v_i \in C$  és  $v_k \in C$ . Mindkét csúcs eleme  $C$ -nek, ezért  $\{v_i, v_k\} \in E$ . Ellentmondásra jutottunk.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

**4.2. ÁLLÍTÁS.** Ha  $(\underline{\alpha}^T, \beta^T)^T$  megengedett megoldása (6)-nak, és  $\underline{\alpha}^T$  a  $C \subseteq V$  karakterisztikus vektora, akkor  $C$  klikk  $G$ -ben.

*Bizonyítás.* Legyen  $(\underline{\alpha}^T, \beta^T)^T$  megengedett megoldása (6)-nak, és tegyük fel indirekt módon, hogy  $C$  nem klikk  $G$ -ben. Ekkor létezik  $1 \leq i, k \leq n$ ,  $i \neq k$ , amire  $v_i, v_k \in C$ , de  $\{v_i, v_k\} \notin E$ . Következik, hogy  $\alpha_i = 1$ ,  $\alpha_k = 1$  és  $v_k \in \overline{N}(v_i)$ .  $\underline{\alpha}^T$  megengedett megoldás, ezért

$$C_i \alpha_i + \sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} \alpha_j \leq C_i$$

feltétel teljesül. Behelyettesítve  $\alpha_i$  és  $\alpha_k$  értékeit azt kapjuk, hogy

$$C_i + 1 + \sum_{v_j \in \overline{N}(v_i), j \neq k} \alpha_j \leq C_i.$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget

$$\sum_{v_j \in \overline{N}(v_i), j \neq k} \alpha_j \leq -1$$

adódik. Ellentmondásra jutottunk, mivel az összeg minden tagja nemnegatív. Ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

További lehetőség a javításra, hogy a csúcsok színezésére más eljárásokat alkalmazunk, amelyek jobb korlátokat adnak. Mi a programokban csak a mohó színezőt használtuk.

#### 4.2. Az (5.2) korlátban a $C_i$ megválasztása lokális élszínezéssel

Ebben az esetben is a (3.2) feltételeket módosítjuk, most azonban nem a csúcsokat színezzük, hanem az éleket. Ehhez tekintsük minden  $v_i$  csúcs esetén a  $v_i$  nemszomszédaiból álló részgráfokat  $G$ -ben. Vegyük egy adott részgráf összes élét, és színezzük őket a következő módon: az első él az 1 színt kapja. A második él

esetén vizsgáljuk meg, hogy van-e közös csúcsa az első éllel. Közös csúcsból legfeljebb egy lehet, így két eset fordulhat elő: egy közös csúcs van, vagy nincs közös csúcs. Legyen az első él két csúcsa  $a_1$  és  $a_2$ , a második él csúcsai pedig  $b_1$  és  $b_2$ . Lehetséges esetek:

1. Egy közös csúcs van. Tegyük fel, hogy  $a_1 = b_1$  (az általánosság megsértése nélkül feltehetjük). Ha  $a_2$  és  $b_2$  között fut él, akkor a második él színe 2, és azt mondjuk, hogy a két él klikket alkot, egyébként 1.
2. Nincs közös csúcs. Ha  $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$  egy 4-klikk  $G$ -ben, akkor a második él színe 2, és azt mondjuk, hogy a két él klikket alkot, egyébként 1.

Tegyük fel, hogy az első  $k$  élt kiszíneztük  $s$  színnel. A  $(k+1)$ -edik él színének meghatározásához végezzük el a fenti vizsgálatot a korábbi élekkel, és tekintsük azt a legkisebb színszámú színosztályt, amelyben a  $(k+1)$ -edik él semelyik éllel nem alkot klikket. Ha van ilyen, akkor a  $(k+1)$ -edik él is bekerül ebbe a színosztályba, ha nincs, akkor a színe legyen  $s+1$ . Ezzel az élnek egy élesített jó színezését kapjuk. Egy klikk összes éle különböző színű lesz, így az eljárás végén az előforduló legnagyobb színszám felső becslést ad a gráfban található  $C$  maximum klikk éleinek számára. Ebből a  $C$  csúcsainak számára vonatkozó becslést könnyen megkaphatjuk. Ha az élekre vonatkozó becslés  $M$ , akkor a  $\binom{|C|}{2} \leq M$  egyenlőtlenségből a  $|C|$  értékére vonatkozó felső becslés másodfokú egyenlet megoldásából adódik:  $|C| \leq \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+8M}}{2} \right\rceil$ .

Színezzük ki minden csúcs esetén a csúcsok nemszomszédaiból alkotott részgráfok éleit a fenti színezéssel. Jelölje  $K_i$  a  $v_i$  nemszomszédaival által kifeszített részgráf esetén kapott felső becslést a részgráfban található maximum klikk méretére.

A Croce-Tadei feltételek  $i$ -edik egyenlőtlenségét ebben az esetben is úgy javíthatjuk, ha  $\overline{N}_i$  helyére  $K_i$ -t írunk:

$$K_i x_i + \sum_{v_j \in \overline{N}(v_i)} x_j \leq K_i, \quad v_i \in V \quad (8)$$

A (4) vegyes-egészértékű program (4.2) feltételét helyettesítsük a (8) feltétellel. Az így kapott programot jelöljük (9)-cel. Ezt megtehetjük, és az erre vonatkozó bizonyításokat megkapjuk, ha a 4.1. és a 4.2. Állításokban és bizonyításaikban a  $C_i$  jelöléseket lecseréljük  $K_i$ -re.

Élszínezéssel erősebb korlátokat kaptunk, mint csúcsszínezéssel, viszont ebben az esetben az összes élt össze kellett hasonlítanunk, ezért hosszabb volt a futásidő. Ha egy  $G$  gráf csúcsai  $k$  színnel jól színezhetők, akkor  $G$  élei élesítetten jól színezhetők  $\binom{k}{2}$  színnel. Ebből az adódik, hogy van olyan élesített élszínezés, amely nem ad rosszabb felső korlátot a klikkméretre, mint a csúcsok jó színezése. Természetesen egy éleket színező mohó algoritmus adhat rosszabb felső korlátot a klikkméretre, mint egy szerencsésebb mohó csúcsszínező. Az, hogy az élszínezés tipikusan jobb

korlátokat ad, mint a csúcsszínezés, egy empirikus tény, amit a példafuttatások során tapasztaltunk.

#### 4.3. Az (5.3) korlátban az $M_i$ választása

A lokális csúcs- és élszínezést nemcsak a Croce-Tadei egyenlőtlenségeknél alkalmazhatjuk, hanem a vegyes-egészértékű program

$$z_i \leq U_i x_i, \quad v_i \in V \setminus \{v_n\}$$

alakú feltételei esetén is.

$N^+(v_i)$  jelöli azokat a szomszédos csúcsokat, amelyek indexe  $i$ -nél nagyobb,  $U_i$  pedig a  $v_i$ -ből  $N^+(v_i)$ -be érkező élek súlyának összegét. Színezzük ki az  $N^+(v_i)$  csúcsok által kifizített  $G$ -beli részgráf csúcsait jól vagy éleket élesített jó színezéssel. Ha  $v_i$  szerepel egy  $C$  klikkben, akkor az  $i$ -nél nagyobb indexű szomszédai közül azok, amelyek szintén szerepelnek  $C$ -ben, klikket alkotnak egymással. Tegyük fel, hogy a színezéssel kapott becslés a részgráfban található maximum klikk méretére  $L_i$ , ami azt jelenti, hogy az  $N^+(v_i)$  halmaz elemeiből legfeljebb  $L_i$  szerepelhet  $C$ -ben. Ezért tekintsük a  $v_i$ -ből induló  $N^+(v_i)$  csúcsokba érkező élek súlyai közül az első  $L_i$  darab legnagyobb súly összegét, ezt jelölje  $M_i$ . Mivel  $M_i \leq U_i$ , ezért  $U_i$  helyére  $M_i$ -t írva szorosabb korlátokat kapunk. A módosított feltétel:

$$z_i \leq M_i x_i, \quad v_i \in V \setminus \{v_n\}.$$

Legyen  $C_i^+$  az  $N^+(v_i)$  csúcsok által kifizített  $G$ -beli részgráfban található maximum klikk, és jelölje  $s_i$  a  $v_i$ -ből az  $C_i^+$  csúcsokba futó élek súlyának összegét.  $|C_i^+| \leq L_i$  és  $s_i \leq M_i$ .

**4.3. ÁLLÍTÁS.** A (7) vegyes-egészértékű program optimális megoldása megadja a maximális élsúlyú klikket  $G$ -ben.

*Bizonyítás.* Azt kell megmutatnunk, hogy a (4.3) egyenlőtlenséget lecserélhetjük (5.3)-ra.

Legyen  $C$  maximális élsúlyú klikk  $G$ -ben. A (4) vegyes-egészértékű program  $C$ -hez tartozó optimális megoldásában

$$z_i = \begin{cases} \sum_{v_j \in N^+(v_i) \cap C} w_e(v_i, v_j), & \text{ha } v_i \in C, \\ 0, & \text{ha } v_i \notin C. \end{cases}$$

$|N^+(v_i) \cap C| \leq |C_i^+| \leq L_i \leq |N^+(v_i)|$ , ezért

$$\sum_{v_j \in N^+(v_i) \cap C} w_e(v_i, v_j) \leq s_i \leq M_i \leq U_i.$$

Ebből következik, hogy a  $z_i \leq U_i x_i$  feltételt valóban lecserélhetjük a  $z_i \leq M_i x_i$  egyenlőtlenségre. Ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

#### 4.4. Az (5.4) korlátban az $S$ választása

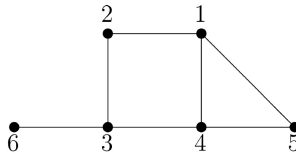
A programokat tovább javíthatjuk, ha az eredeti gráfot is kiszínezzük. Ezt globális színezésnek nevezzük. A kapott értéket jelöljük  $S$ -sel. Ez felső becslést ad a gráfban található maximum klikk méretére, ezért a korábbi programokhoz hozzávehetjük a

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq S$$

feltételt. A tesztekben globális élszínezést használtunk a plusz feltétel megfogalmazásához.

#### 4.5. Példa

Tekintsük a következő  $G$  gráfot:



1. ábra.  $G$  gráf

$G$ -nek 6 csúcsa és 7 éle van. Az él átfogalmazásból adódó egészértékű program a maximum klikk problémára 6 változót és 8 feltételt tartalmaz. A változók 0-1 változók.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$		
	1	1	1	1	1	1	$\rightarrow$	max
(1)	1		1				$\leq$	1
(2)	1					1	$\leq$	1
(3)		1		1			$\leq$	1
(4)		1			1		$\leq$	1
(5)		1				1	$\leq$	1
(6)			1		1		$\leq$	1
(7)				1		1	$\leq$	1
(8)					1	1	$\leq$	1

1. táblázat. Él átfogalmazás

A Croce-Tadei átfogalmazásból kapott egészértékű programot a 2. táblázat, a módosított Croce-Tadei átfogalmazásból (a (3) program a (3.2) korlát helyett az

(5.2) feltétellel) kapott egészértékű programot pedig a 3. táblázat tartalmazza. A programokban 6 változó és 6 feltétel szerepel. A változók 0-1 változók.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$		
	1	1	1	1	1	1	$\rightarrow$	max
(1)	2		1			1	$\leq$	2
(2)		3		1	1	1	$\leq$	3
(3)	1		2		1		$\leq$	2
(4)		1		2		1	$\leq$	2
(5)		1	1		3	1	$\leq$	3
(6)	1	1		1	1	4	$\leq$	4

2. táblázat. Croce-Tadei átfogalmazás

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$		
	1	1	1	1	1	1	$\rightarrow$	max
(1)	2		1			1	$\leq$	2
(2)		2		1	1	1	$\leq$	2
(3)	1		2		1		$\leq$	2
(4)		1		1		1	$\leq$	1
(5)		1	1		2	1	$\leq$	2
(6)	1	1		1	1	3	$\leq$	3

3. táblázat. Módosított Croce-Tadei átfogalmazás

A megengedett megoldások halmaza a három egészértékű program esetén azonos. Az  $x_i \in \{0, 1\}$  változókat a  $0 \leq x_i \leq 1$  valós változókkal helyettesítve az egészértékű programok lineáris relaxációit kapjuk. A kérdés az, hogy a lineáris relaxációk megengedett megoldásainak  $A_1, A_2, A_3$  halmazai hogyan viszonyulnak egymáshoz.

A Croce-Tadei átfogalmazás minden feltétele az él átfogalmazás bizonyos feltételeinek összege, amiből következik, hogy  $A_1 \subseteq A_2$ . Egy egészértékű program feltételei megfeleltethetők hipersíkoknak. Kiszámítva a koordinátengelyek és a hipersíkok metszetét, arra a következtetésre juthatunk, hogy  $A_3 \subseteq A_2$ .

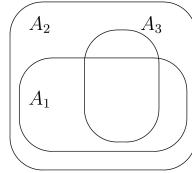
Legyen  $P = (p, p, p, p, p, p)$  egy tesztpont. Ha  $p = 0.5$ , akkor láthatjuk, hogy  $P \in A_1, P \in A_2, P \notin A_3$ .

Legyen  $Q = (0, q, 0, 0, q, 0)$  szintén egy tesztpont. Ha  $q = 0.75$ , akkor láthatjuk, hogy  $Q \notin A_1, Q \in A_2, Q \notin A_3$ . Ha  $q = 0.66$ , akkor  $Q \notin A_1, Q \in A_2, Q \in A_3$ . Végül, ha  $q = 0.5$ , akkor  $Q \in A_1, Q \in A_2, Q \in A_3$ .



A  $q = 0.66$  és a  $q = 0.75$  választások mutatják, hogy az él átfoglalmazás  $x_2 + x_5 \leq 1$  feltétele nem következhet sem az eredeti, sem a módosított Croce-Tadei átfoglalmazásból.

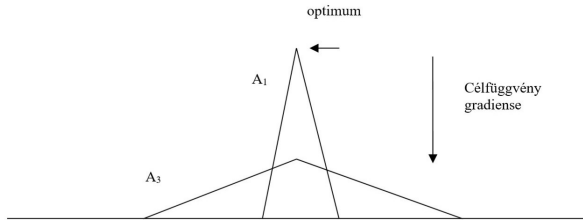
A lineáris relaxációk megengedett megoldásainak halmazai közötti kapcsolatot a következő ábra szemlélteti:



2. ábra. A megengedett megoldások halmazai

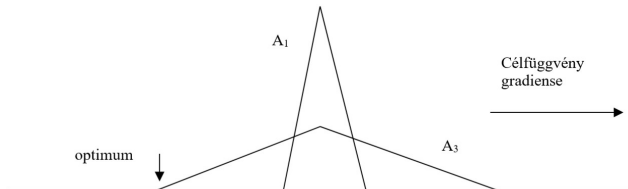
A 2. ábra nemcsak a példára, hanem általánosan is igaz. A következő ábrák azt mutatják, hogy bizonyos célfüggvényekre az él átfoglalmazás, míg más célfüggvényre a módosított Croce-Tadei átfoglalmazás ad jobb felső korlátot.

Az alábbi helyzetben az él átfoglalmazás optimum értéke nagyobb, mint a módosított Croce-Tadei átfoglalmazásban.



3. ábra. A célfüggvény gradiense vertikális

Ha a célfüggvény gradiense horizontális, akkor fordul a helyzet. A Croce-Tadei átfoglalmazás optimum értéke nagyobb, mint az él átfoglalmazás optima.



4. ábra. A célfüggvény gradiense horizontális

A maximum klikk probléma él és Croce-Tadei átfogalmazásának megengedett megoldásai általában is úgy viszonyulnak egymáshoz, mint a példa esetében. Ha egy csúcssúlyozott maximum klikk problémát tekintünk, vagyis egy  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$  alakú célfüggvényt alkalmazunk, akkor a  $c_1, \dots, c_n$  együtthatók választhatók úgy, hogy az él átfogalmazás adja a kisebb optimumot, de választhatók úgy is, hogy a Croce-Tadei átfogalmazáshoz tartozik a kisebb optimum.

A maximális élsúlyú klikk probléma esetében a  $z_1, \dots, z_{n-1}$  új változók miatt a geometriai kép megváltozik. A két átfogalmazás összehasonlítására nem marad más eszközünk, mint numerikus kísérletek eredményeinek összehasonlítása. Ezen az alapon a Croce-Tadei átfogalmazás jobb becsléseket ad, mint az él átfogalmazás. Ez egy megfigyeléseken alapuló észrevétel, amelynek van a gyakorlatban is használható jelentősége, de nem szeretnénk matematikai értelemben vett bizonyított eredmény szintjére emelni.

## 5. Számítási eredmények

A módosított programokat a [6] cikkben található DIMACS gráfokon teszteltük. Ezek a gráfok nem élsúlyozottak, ezért a cikk szerzőihez hasonlóan az éleket a  $w_e(v_i, v_j) = (i + j) \bmod 200 + 1$  módszerrel súlyoztunk, bár a [2] munka kritizálja ezt a gyakorlatot. Az eredményeket a 6. táblázatban foglaltuk össze. A táblázatban az eredeti és a módosított programok lineáris relaxációinak optimum értékei szerepelnek. Az egyes oszlopok jelentését a 4. táblázat tartalmazza.

$ V $	csúcsok száma
$ E $	élek száma
$d$	élsűrűség
optimális súly	a maximális élsúlyú klikk élsúlyainak összege
LR	az eredeti (4) vegyes-egészértékű program lineáris relaxációjának optimuma
LP1	a (6) vegyes-egészértékű program lineáris relaxációjának optimuma
LP2	a (9) vegyes-egészértékű program lineáris relaxációjának optimuma
LP3	a (9) vegyes-egészértékű program lineáris relaxációjának optimuma kiegészítve az (5.5) feltétellel
LP4	az (5) vegyes-egészértékű program lineáris relaxációjának optimuma az (5.2) feltétel helyett a (8) feltétellel

4. táblázat. Az oszlopok jelentése a 6. táblázatban

Az LR oszlopot összehasonlítva az LP1, LP2, LP3 és LP4 oszlopokkal láthatjuk, hogy jelentősen csökkentek az optimum értékek, minél több helyen módosítottuk a programot, annál jobb becsléseket kaptunk. Ez azonban azzal járt, hogy tovább tartott az egyes feltételek meghatározása.

Az optimum értékek csökkenésétől azt reméljük, hogy ez futásidő megtakarításhoz vezet. Az 5. táblázatban összefoglalt eredmények megerősítik ezt a várakozásunkat. Egészértékű programokkal kerestünk maximum klikket tesztgráfokban. A futásidőket az utolsó kettő oszlop tartalmazza. EP1 jelöli az (1) programmal (él átfogalmazás), kapott értékeket, és EP2 a módosított Croce-Tadei átfogalmazással (a (3) program a (3.2) korlát helyett az (5.2) feltétellel) kapott eredményeket.

gráf	$ V $	$ E $	$\omega(G)$	EP1 (s)	EP2 (s)
brock200_4	200	13 089	17	1 264.57	250.96
c-fat200-2	200	3 235	24	108.58	1.20
c-fat500-2	500	9 139	26	3 920.36	88.95
hamming6-4	64	704	4	4.71	1.28
hamming8-2	256	31 616	128	0.70	0.56
johnson8-2-4	28	210	4	0.57	0.64
johnson8-4-4	70	1 855	14	0.87	0.72
johnson16-2-4	120	5 460	8	176.47	0.57
keller4	171	9 435	11	198.16	63.67
MANN_a9	45	918	16	0.77	0.68

5. táblázat. Futásidők

## 6. Összefoglalás

Jelen munkában megmutattuk, hogy a maximális élsúlyú klikk problémát megoldó (4) vegyes-egészértékű program módosítására milyen lehetőségeink vannak csúcs- és élszínezés alkalmazásával, továbbá hogy az általunk tesztelt gráfok esetén az új programok lineáris relaxációinak optimumai hogyan közelítették az eredeti optimumokat. A kutatás folytatására további lehetőség a programok módosítása más gráfszínező eljárásokkal, kernelizálással és kombinatorikus alapú metszősíkokkal.

## Köszönetnyilvánítás

Jelen munka az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának szakmai támogatásával készült.

gráf	$ V $	$ E $	$d$	optimális súly	LR	LP1	LP2	LP3	LP4
brock200_1	200	14 834	0.7454	21 230	745 274	404 970	325 396	291 002	157 715
brock200_2	200	9 876	0.4963	6 542	494 967	165 306	98 245	89 333	33 107
brock200_3	200	12 048	0.6054	10 303	604 606	251 884	174 825	157 365	69 594
brock200_4	200	13 089	0.6577	13 967	657 976	299 278	219 071	197 618	92 811
c-fat200-1	200	1 534	0.0771	7 734	77 034	11 260	11 260	11 260	10 506
c-fat200-2	200	3 235	0.1626	26 389	162 735	40 564	40 564	40 259	37 558
c-fat200-5	200	8 473	0.4258	168 200	425 773	284 558	284 558	248 360	230 283
c-fat500-1	500	4 459	0.0357	10 738	224 609	15 787	15 787	15 787	14 707
c-fat500-2	500	9 139	0.0733	38 350	460 288	55 986	55 986	55 986	51 941
c-fat500-5	500	23 191	0.1859	205 864	1 167 941	316 807	316 807	303 693	284 812
c-fat500-10	500	46 627	0.3738	804 000	2 348 177	1 345 450	1 345 450	1 188 530	1 112 891
DSJC500_5	500	62 624	0.5020	9 626	3 154 650	891 040	481 241	443 642	120 271
hamming6-2	64	1 824	0.9048	32 736	60 192	60 192	60 192	60 192	37 926
hamming6-4	64	704	0.3492	396	23 232	6 776	4 130	2 905	811
hamming8-2	256	31 616	0.9686	800 624	1 558 464	1 558 464	1 558 464	1 558 464	1 148 298
hamming8-4	256	20 864	0.6392	12 360	1 021 056	302 535	218 089	184 080	47 902
johnson8-2-4	28	210	0.5556	192	3 150	900	900	900	286
johnson8-4-4	70	1 855	0.7681	6 552	66 780	26 843	26 712	26 712	8 700
johnson16-2-4	120	5 460	0.7647	3 808	308 860	41 377	41 377	41 377	6 819
keller4	171	9 435	0.6491	6 745	483 595	168 637	122 228	104 061	32 049
MANN_a9	45	918	0.9273	5 460	21 654	17 323	17 323	17 323	7 872

6. táblázat. A lineáris programok optimum értékei

## Hivatkozások

- [1] CROCE, F. D. AND TADEI, R.: *A multi-KP modeling for the maximum-clique problem*, European Journal of Operational Research, Vol. **73** No. **3**, pp. 555-561 (1994). DOI: [10.1016/0377-2217\(94\)90252-6](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)90252-6)
- [2] MCCREESH, C., PROSSER, P., SIMPSON, K. AND TRIMBLE, J.: *On Maximum Weight Clique Algorithms, and How They Are Evaluated*, In: Beck J. (eds) Principles and Practice of Constraint Programming. CP 2017. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cham, Vol. **10416** (2017). DOI: [10.1007/978-3-319-66158-2\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66158-2_14)
- [3] MOON, J. W. AND MOSER, L.: *On cliques in graphs*, Israel J. Math., Vol. **3**, pp. 23-28 (1965). DOI: [10.1007/BF02760024](https://doi.org/10.1007/BF02760024)
- [4] ÖSTERGÅRD, P. R.: *A new algorithm for the maximum-weight clique problem*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, Vol. **3**, pp. 153-156 (1999). DOI: [10.1016/S1571-0653\(05\)80045-9](https://doi.org/10.1016/S1571-0653(05)80045-9)
- [5] PULLAN, W.: *Approximating the maximum vertex/edge weighted clique using local search*, Journal of Heuristics, Vol. **14**, pp. 117-134 (2008). DOI: [10.1007/s10732-007-9026-2](https://doi.org/10.1007/s10732-007-9026-2)
- [6] SHIMIZU, S., YAMAGUCHI, K. AND MASUDA, S.: *A Branch-and-Bound Based Exact Algorithm for the Maximum Edge-Weight Clique Problem*, In: Lee R. (eds) Computational Science/Intelligence & Applied Informatics. CSII 2018. Studies in Computational Intelligence, Springer, Cham, Vol. **787** (2019). DOI: [10.1007/978-3-319-96806-3\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-96806-3_3)
- [7] SHIMIZU, S., YAMAGUCHI, K. AND MASUDA, S.: *A maximum edge-weight clique extraction algorithm based on branch-and-bound*, Discrete Optimization, Vol. **37**, paper: 100583 (2020). DOI: [10.1016/j.disopt.2020.100583](https://doi.org/10.1016/j.disopt.2020.100583)
- [8] SHIMIZU, S., YAMAGUCHI, K. AND MASUDA, S.: *Mathematical programming formulation for the maximum edge-weight clique problem*, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences (in Japanese), Vol. **J100-A** No. **8**, pp. 313-315 (2017).



Szabó Sándor 1954-ben született Karcagon. Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen tanult matematikát és fizikát. Jelenleg a Pécsi Tudományegyetem Matematikai és Informatikai Intézetében dolgozik. Fő érdeklődési területe a diszkrét matematika és alkalmazásai.

Szabó Sándor  
 Pécsi Tudományegyetem  
 Alkalmazott Matematika Tanszék  
 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.  
 szabos@ttk.pte.hu



Sztojkovics Dóra 1996-ban született Pécsen. 2015-ben kezdte meg tanulmányait matematika alapszakon a Pécsi Tudományegyetemen. A 34. Országos Tudományos Diákköri Konferencián első helyezést ért el Tanulás- és Tanításmódszertani - Tudástechnológiai Szekcióban. Következő tanévben elnyerte az ÚNKP ösztöndíjat, és új kutatási területe a diszkrét matematika lett. 2020-ban alkalmazott matematikus diplomát szerzett.

Sztojkovics Dóra

Pécsi Tudományegyetem  
7624 Pécs, Ifjúság útja 6.  
sztojkovics@gmail.com

## LINEAR PROGRAMS FOR THE EDGE WEIGHTED MAXIMUM CLIQUE PROBLEM

SÁNDOR SZABÓ, DÓRA SZTOJKOVICS

Finding an edge weighted maximum clique in a given graph is an interesting problem and has many important applications. An earlier work [6] claims that a solver based on combinatorial considerations and exhaustive search outperforms solvers based on linear and quadratic programming. In this paper we propose modifications in the linear program reformulation of the edge weighted maximum clique problem. The modifications are based on coloring the nodes and edges of the graph. In order to assess the performance of the programs we carried out numerical experiments.

## HIBRID ADATSZERKEZET HALMAZMŰVELETEK HATÉKONY IMPLEMENTÁLÁSÁHOZ

BERTÓK BOTOND

Kombinatorikus vagy egészváltozós optimalizálási algoritmusok leírása gyakran tartalmaz halmazokat és azokon végzett műveleteket. A kombinatorikus algoritmusok között sok az elméletileg is nagy számítási bonyolultságú, ezért a praktikusan megoldható feladatok mérete nagyban függ a megvalósítás minőségétől. Ugyanakkor a halmazműveletek számítógépes implementációja nem kézenfekvő. Ahogy a cikkben bemutatom, nagyságrendi különbségek lehetnek egyes halmazműveletek sebességei között annak függvényében, hogy a halmaz valójában milyen adatszerkezetet takar.

Új eredményként egy olyan hasítótábla-bitvektor hibrid adatszerkezetet javasolok objektumhalmazok számítógépes implementációjára, mely akár több nagyságrenddel gyorsabb futási teljesítményre képes, mint a legújabb fordítóprogramokhoz mellékelt C++ függvénykönyvtári adatszerkezetek.

### 1. Bevezetés

Munkám során üzleti és műszaki folyamatok optimalizálásával és számítógépes döntéstámogatásával foglalkozom, járműütemezéstől [1] az elektromos hálózatok terhelésselosztásáig [2] számos területen, ami magában foglalja a támogatandó feladatok formalizálását [3] és támogató algoritmusaik hatékony implementálását [4]. Ebben a fejezetben azt mutatom be, hogyan fogalmazódott meg a cikkben javasolt módszerrel megoldandó feladat.

#### 1.1. Folyamathálózat-szintézis

A vegyipari folyamatok hatékonyságára akár nagyságrenddel nagyobb hatással lehet annak topológiája és a hálózat elemeinek megfelelő kiválasztása, mint az elemek finomhangolása, ezért Friedler és Fan a korábbiaktól merőben eltérő megközelítést javasolt folyamattervezésre, amit hálózatszintézisnek neveztek el [5]. Szintézisnek azt a kreatív tevékenységet hívták, ahol a lehetséges építőelemek egy halmazából egy működő hálózat előáll. A feladat megfelelő formalizálása és matematikai megalapozása mellett kezdetől fogva fontosnak tartották a strukturális

döntési alternatívák körének kézben tartását [6], mely struktúrák közül – bizonyos kvantitatív paraméterek mellett – bármelyik lehet optimális. Egy-egy struktúra optimális működési pontjának meghatározását másodlagos feladatnak (analízisnek) tekintették, hiszen a legnehezebb kérdések addigra már eldőlték, de a potenciális struktúrák számának csökkentésével az optimális hálózat keresése is jelentősen gyorsítható [7].

### 1.1.1. A szuperstruktúra megközelítés

A vegyes egész optimalizálási modellek egész része gyakran tartalmaz strukturális döntéseket, például az építőelemek potenciális kapcsolatairól. Az optimalizálás azonban a lehetőségeknek csak a változókkal és korlátokkal definiált körében keres megoldást, azon kívülre nem képes tekinteni. Tehát, ha a matematikai programozási modell felírásakor a változók köréből vagy tartományából kimarad olyan eset, ami a valóságban megvalósítható vagy akár optimális lenne, azt a programozási modell megoldásaként értelmezett optimalizálás nem fedezheti fel. Gyakorlati példákkal és félrevezető modellekkel is szemlélítette a hiba kockázatát, bevezették a szigorú szuperstruktúra fogalmát, ami egy gyakorlati feladatra tekintve bizonyíthatóan tartalmazza annak alternatív struktúrái között legalább egy optimális megoldását [8]. Folyamathálózatok esetén a feladatot a kitűzött célok (termékek) halmazával, az elérhető erőforrások (nyersanyagok) halmazával és a kettőt közbeíró célokra átvezető hálózatban összekapcsolni képes egyes megengedett lépések (műveleti egységek) halmazával definiálták [16]. A szuperstruktúra építésére gyors polinomiális algoritmust adtak [10]. Ezután a szuperstruktúra garantáltan részeként tartalmazza a feladat alternatív megoldásainak szerkezetét, és strukturális értelemben a feladat minden lehetséges megoldását definiálja a szuperstruktúra egy részgráfja, ami megadható a benne szereplő lépések, illetve azok előfeltételeinek és következményeinek halmazával.

### 1.1.2. Problématérkép

Egy gyakorlati optimalizálási feladat esetén a számba veendő lehetséges lépések feltárásában is segít a maximális struktúra szisztematikus felépítése, mely egy technológiai adatbázisban [12] vagy úthálózatban [13, 5. fejezet] lehatárolja a kiindulástól a célig vezető lehetséges lépéseket. Úgy, ahogyan egy gondos mérnök jár el folyamattervezés esetén, amikor figyelembe veszi egy gyártási feladatban felhasználható összes ismert technológiát [11], de figyelembe veszi a cég piaci pozícióját, megadva az általuk reálisan eladható termékeket és reálisan elérhető nyersanyagokat is. Ezáltal megint egy hatalmas technológiai hálózathoz vagy úthálózathoz jutunk, melynek része lesz a választott technológia lépések vagy bejárt útszakaszok sora az optimális hálózatban.



### 1.1.3. Problémateret leíró gráf algoritmikus feltárása

Vannak olyan folyamatok is, ahol a közbülső lépések lehetséges előzményei és következményei nem adódnak olyan természetesen, mint egy útvonal közbülső városai. Például egy jármű- vagy személyzet-hozzárendelési feladatban a menetrend és térkép alapján eldönthető, hogy egy túra teljesítése után odaér-e még az erőforrás egy másik túra kezdőpontjára, de ez csak algoritmikusan feltárható, a feladatban nem listaszerűen adott [1]. Ugyanígy egy receptben szereplő tevékenységek előfeltételeinek tranzitív láncolatán keresztül visszakövethető, hogy mely feladat után biztosan nem fog egyik berendezés sem olyan feladatot végezni, aminek a recept szerint korábban kell lennie [18]. Hasonlóan a szétválasztási technológiák összes permutációjának okos szisztematikus figyelembevételével generálható a szétválasztási lépések kimenetén szereplő anyagáramok összetételét adó összes elérhető komponens variáció [17, 5. fejezet]. Ezen példák azt mutatják, hogy a probléma-tér gyakran nem explicit felsorolással, hanem logikai szabályokkal adott, melyek alapján mégis bizonyíthatóan felépíthető egy olyan nagy kiterjedésű gráf, mely részeként tartalmazza a feladat minden kombinatorikusan megengedett megoldását. Az állítás még akkor is igaz, ha a kapcsolódó kvantitatív paraméterek sem pontosan, csak bizonyos diszkrét eloszlással ismertek [19].

Fontos megjegyezni, hogy a problématérkép-gráf ábrázolása nemcsak az egzakt modellezést, de egy feladat megértését is segíti. A könnyű érthetőség ellenőrizhető modell-prototípusokhoz, a prototípusok pedig modellezési sémákhoz vezetnek. Mindemellett az érthetőség és a gráf egy-egy kiemelt részének átláthatósága a felhasználói bizalmat is növeli, ha a modellre épített optimalizálás ipari vagy üzleti döntéstámogató részévé válik.

## 1.2. Gráfok, halmazok, diszkrét optimalizálás

Ha diszkrét struktúrák, gráfok és hálózatok formális leírásába kezdünk, tanulásunk első lépései között találkozunk a halmazokkal és azokon végzett műveletekkel [9]. Ugyanígy igaz ez a folyamathálózatok leírására [16] és algoritmusaira [5]. Programozás vagy algoritmuselmélet kurzuson pedig megtanuljuk a – Knuth könyvei óta alapismeretként kezelt – alapvető algoritmusokat [14] és adatszerkezeteket [15], de ritkán találkozunk annak tárgyalásával, hogy milyen tulajdonságú halmazokat milyen adatszerkezettel érdemes megvalósítanunk.

### 1.2.1. Gráfok leírása halmazokkal

Gráfokat gyakran írunk le halmazokkal, például a csúcsok és élek halmazával. Folyamathálózatok esetén az építőelemek kettőssége miatt a folyamat-gráf, processzus-gráf, vagy röviden P-gráf egy páros gráf. A csúcsok két osztályában az aktivitások (hagyományos terminológiával a műveleti egységek) és az előfeltételeiket és következményeiket adó entitások (technológiai hálózatban a műveleti

egységek be- és kimeneti anyagai) vannak. Az aktivitásokhoz egy halmaz- [16] vagy leképezéspárral [4] adják meg az előfeltételeik illetve következményeik (be- és kimeneteik) halmazát. Ezután az aktivitások vagy entitások egy halmazára is leképezések adják meg azok potenciális előzményeit és hatásait.

### 1.2.2. A folyamathálózat-szintézis algoritmusok leggyakoribb műveletei

Akár a hálózatszintézis algoritmusok alapjait [5], akár azok megvalósítását [4] tekintjük, szinte minden lépésben halmazműveletekkel találkozunk. Annak érdekében, hogy a halmazműveletek közül tudjuk, hogy melyik milyen hangsúllyal szerepel egy feladat megoldásában, nézzünk néhány példát. Ehhez a P-graph Studio szoftverben [3] szereplő megoldóval megszámoztattam – szakirodalomból ismert komplex feladatokra – az alternatív legjobb megoldások generálása során végrehajtott különböző halmazműveleteket. A tesztfeladatok között szerepel egy klasszikus hálózatszintézis feladat (Process Network Synthesis, PNS)[6], egy szétválasztási hálózat szintézise (Separation Network Synthesis, SNS)[8], egy jármű-hozzárendelési feladat (Vehicle Scheduling Problem, VSP)[22], egy evakuálási útvonal tervezése (Evacuation Route Planning, ERP)[21] és egy teljes ellátási lánc környezeti értékelése (Supply Chain Optimization, SCO)[23]. Mindegyik feladat esetén a relaxációvezérelt optimalizáló eljárással a 100 legjobb hálózat leszámolását kértem, kivéve az evakuációtervezés feladatnál, ahol (a feladat nagy mérete miatt) csak a két legjobb hálózatot generáltattam. A számolások eredményét az 1. táblázat tartalmazza. Megjegyzem, hogy az unió műveletek számába beleszámoltam a halmazok másolását végző értékadás műveleteket is, hiszen a gyakorlatban ugyanarról van szó: a halmaz minden elemét át kell másolni egy másik halmazba.

1. táblázat. Halmazműveletek előfordulása folyamatszintézis során

Művelet	PNS	SNS	VAP	ERP	SCO	Átlag
unió	251 346	72 181 072	6 878 466	36 500 529	76 971	77,41%
metszet	27 385	8 608 074	230 518	2 660 931	6 442	6,32%
részhalmaz	1 892	393 004	13 102	17 105	501	0,34%
új elem beszúrása	100	95	272	1 729	88	0,03%
ismert elem beszúrása	10 142	5 646 549	118 475	2 506 031	4 596	3,94%
elem tartalmazás	29 550	16 593 572	453 379	10 730 444	7 860	11,96%

A tesztfeladatok lépéseinek eloszlását átlagolva, a táblázat utolsó oszlopa alapján megállapítható, hogy a markánsan legnagyobb arányban végrehajtott halmazművelet az unió, melyet nagyságrenddel kisebb számban az elem tartalmazás vizsgálata és a metszet követ. Tehát a megoldás kombinatorikus részének gyorsításához alapvetően az unió és metszet műveletre, valamint az elemtartalmazás-

vizsgálatra kell koncentrálnunk, olyan implementációt kell keresnünk, mely ezen műveleteket nagyon gyorsan el tudja végezni.

### 1.3. Célkitűzés

Ebben a publikációban a halmazok és halmazműveletek lehetséges implementációit tárgyalom és hasonlítom össze – felépítésük mellett – gyakorlati futási idejüket mérve különböző tesztkészleteken. Eközben javaslatot teszek egy új típusú hibrid adatszerkezetre is, mely általános objektumhalmazok esetén nagyságrendekkel gyorsabban teszi lehetővé halmazműveletek (elsősorban unió és metszetképzés) végrehajtását, mint hagyományos alternatívái.

## 2. Halmazokat leíró adatszerkezetek

A halmaz adatszerkezeteket két csoportban vizsgálom. Először azokat, melyek csak természetes számok tárolására alkalmasak. Utána pedig azokat, melyekben tetszőleges adat tárolható.

### 2.1. Számhalmazok

A mai programozási nyelvek alapvetően háromféle halmazt különböztetnek meg. Első a rendezett halmaz, második a rendezetlen halmaz, harmadik pedig a bithalmaz. Példaként mindhárom esetben tekintsük az  $\{1; 3; 5\}$  és az  $\{1; 3; 8; 9\}$  halmazokat, valamint ezek unióját.

#### 2.1.1. Rendezett halmaz

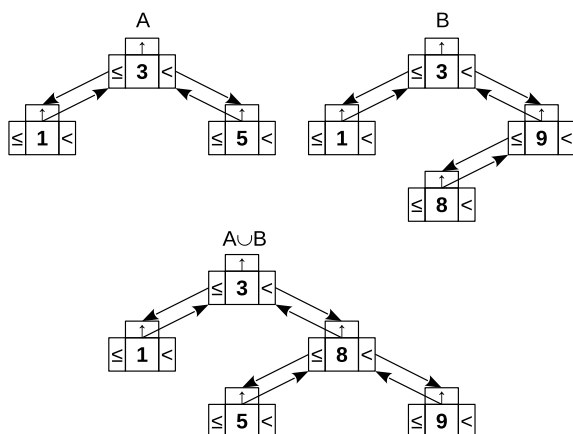
A rendezett halmaz gyakorlatilag egy keresőfa, ahol egy-egy elem várhatóan  $\log_2(n)$  nagyságrendben beszűrhető, törölhető és megtalálható, ha a fa bináris és kiegyensúlyozott, és  $n$  a tárolt elemek száma.

Implementációban általában a tárolt elemek értékén kívül mutatók adják meg az adott részében nála nagyobb, nála kisebb elemek helyét valamely rendezés szerint, továbbá a szülőhelyét, ahogy az 1. ábrán is láthatjuk. Megjegyzem, hogy ugyanazon számhalmazhoz többféle keresőfa is tartozhat, az ábrán egy lehetséges példát, de nem az egyetlen helyes elrendezést láthatjuk. A rendezés számok esetén természetes.

Két halmaz uniójának képzéséhez az egyik keresőfa minden elemét le kell másolnunk, és beletenni mindazon elemeket, melyek ezen túl a másik halmazban szerepelnek. Ez a gyakorlatban számos memórafoglalási műveletet igényel a fa csúcsainak számára akkor is, ha a halmaz elemeit nem a fában tároljuk, csak hivatkozunk rájuk.

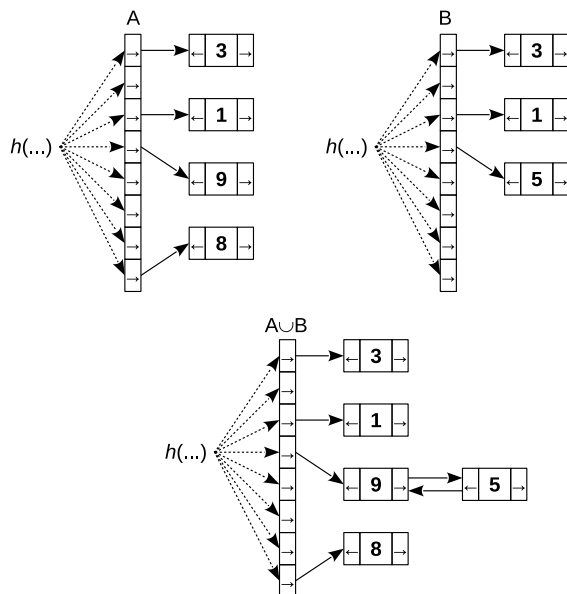
#### 2.1.2. Rendezetlen halmaz

A rendezetlen halmazokat többnyire hasítótáblával implementálják, ahol egy



1. ábra. Számhalmazok és halmazműveletek eredményének leírása keresőfával.

$h()$  hasítófüggvény adja meg, hogy egy adott elem melyik tárolóba kerüljön. Jó esetben minden tárolóban, ha nem is egyetlen, de kevés korlátozott számú elem szerepel. Az egy tárolóban levő elemeket valamilyen dinamikus tárolással felsoroljuk, például láncolt listával, ahogy a 2-es ábrán látható.



2. ábra. Számhalmazok és halmazműveletek eredményének leírása hasító táblával.

A hasítótábla előnye, hogy általában adható olyan  $h()$  függvény, ami konstans időben kiszámítható, és segítségével közvetlenül a keresett tárolóhoz jutunk, melyben az előre rögzített korlátos elemszám miatt korlátos fix lépésben biztosan megtaláljuk a keresett elemet. Ezért várható értékben egy elem megtalálása gyorsabb, mint a keresőfánál.

Unió képzéséhez itt is minden elemet át kell másolnunk egyik tárolóból a másikba, majd mellé tenni a másik tároló kiegészítő elemeit. Ez is számos memória-foglalási művelettel jár.

### 2.1.3. Bithalmaz

A halmazok egy speciális változata, amit az angol irodalomban bithalmazként, a magyar szaknyelvben inkább bitvektorként emlegetünk. Itt egy tömbben az egyes pozícióban szereplő bitek jelzik, hogy a pozíciónak megfelelő szám szerepel-e a halmazban. Tehát, ha például a 2-es sorszámú bit értéke 0, akkor a 2-es szám nem szerepel, ha az 1-es sorszámú bit értéke 1, akkor az egyes szám szerepel a halmazban, lásd 3. ábra.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
A									

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
B									

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
A ∪ B									

3. ábra. Számhalmazok és halmazműveletek eredményének leírása bitvektorral.

Ha a 0 értéket hamisnak, az 1 értéket igaznak tekintjük, akkor két bithalmazzal ábrázolt számhalmaz unióját a bitenkénti „vagy” művelettel számolhatjuk. Ennek megvalósítása rendkívül gyors lehet, mert ezt a műveletet minden mai CPU ismeri, és egyszerre végre tudja hajtani annyi bite, amennyi az adatregiszterek hossza, ami manapság tipikusan 64. Fontos megjegyezni, hogy ebben a leírásban csak természetes számokat tudunk tárolni, vagy olyan adatokat, melyek kölcsönösen egyértelműen leképezhetők természetes számokra. A tároló mérete pedig nem az elemek számától, hanem a számok értelmezési tartományától függ. Tehát, ha a halmazban csak két szám, a 0 és a 10 000 szerepel, akkor is egy legalább 10 001 bit hosszú tömbre van szükségünk.

### 2.1.4. Indexelt halmaz

Újdonságként egy olyan halmazleírást javaslok, amely ötvözi a fentiekben bemutatott halmazleírások előnyeit. Ehhez olyan módszerre van szükség, mely tetszőleges objektumokhoz tud természetes számokat rendelni olyan módon, hogy az alábbi kérdések mindegyike gyorsan megválaszolható legyen:

- Egy objektumnak van-e már sorszáma?
- Mi egy már ismert elem sorszáma?
- Egy adott sorszám melyik objektumhoz tartozik?

Tegyük fel, hogy egy keresőfában vagy hasítótáblában nem a halmaz, hanem az értelmezési tartomány elemeit tároljuk, de csak azokat, melyek a halmazműveletek során legalább egyszer előfordultak már. Például ahhoz, hogy egy úthálózatban leképezzük a 73-as és 7302-es út elágazóját, nem kell minden számot kezelnünk 73-tól 7302-ig, melyek olyan utakat jelölnek, amik az ország másik végében vannak.

Ezután az értelmezési tartomány már előfordult elemeihez sorra egy-egy hivatkozást illesztünk egy tömbben, ezáltal egy mesterséges hivatkozási számot vagy indexet rendelve hozzájuk, mely nullától indul és az új elemekkel egyenként nő. Tehát a példánkban a 73-as úthoz hozzárendeljük a 0-s, a 7302-es úthoz pedig az 1-es indexet, így a két elemet a 73-7302 számtartomány helyett a 0-1 index tartománnyal azonosítjuk. Egyúttal az indexet a keresőfában vagy hasítótáblában tárolt elemek mellé is bejegyezzük, ahogy a 4-es és 5-ös ábrán látható. Ezután az elemek halmazait az indexek bithalmazával írjuk le. Ennek eredményeként:

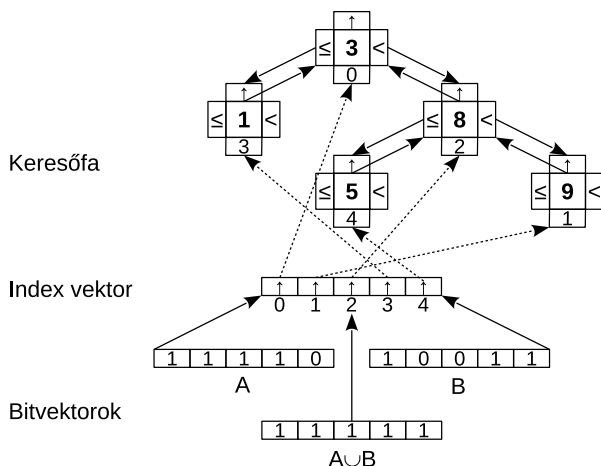
- A keresőfa vagy hasítótábla egyetlen példányban létezik csak, a lehető leggyorsabban megadva egy tetszőleges objektumhoz a mellé bejegyzett indexet.
- A halmazműveletek során a keresőfa vagy hasítótábla nem változik, hiszen már ismert elemekkel dolgozunk, nincs szükség az elemek egyenkénti helyfoglalására és másolására.
- A halmazműveletek bitenkénti logikai műveletekkel elvégezhetők, ugyanúgy és ugyanolyan gyorsan, mint a bithalmazoknál.
- A bithalmazzal ellentétben nem feltétlenül csak számokat tudunk tárolni.
- A bitvektor hossza a műveletek során legalább egyszer előforduló elemek számától és nem az értelmezési tartományától függ.

Ettől a leírástól azt remélem, hogy a korábbiaknál praktikusán sokkal gyorsabban futó halmazműveleteket eredményez. Ezt a későbbi fejezetekben tesztekkel vizsgálom.

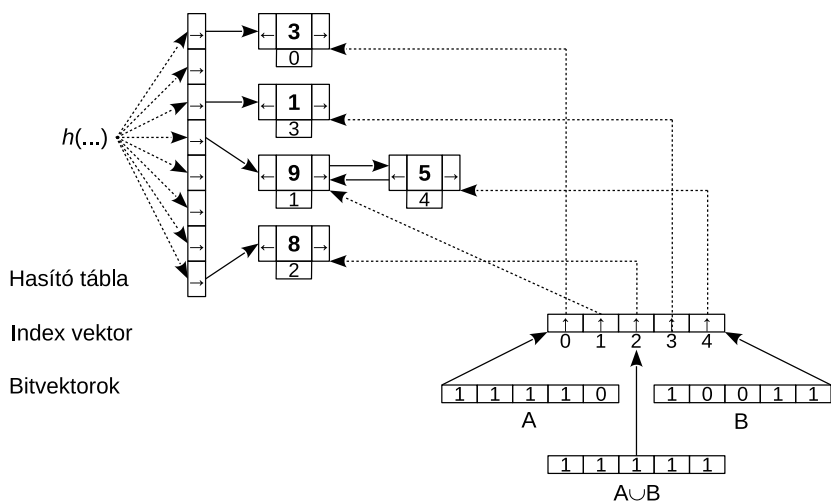
## 2.2. Univerzális halmazok

Ebben a fejezetben bemutatom, hogy ha nem számokat, hanem tetszőleges objektumot akarunk halmazban tárolni, akkor milyen adatszerkezetet használhatunk. Példaként karakterláncok tárolását tekintjük.

Gondolhatnánk persze, hogy bármit meg tudunk számozni, és onnantól használhatjuk az előző fejezetben javasolt adatszerkezetek bármelyikét. Ugyanakkor



4. ábra. Számhalmazok és halmazműveletek eredményének leírása keresőfával implementált indexelt halmazzal.

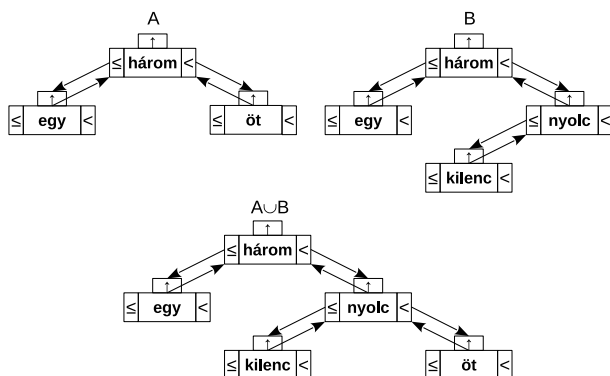


5. ábra. Számhalmazok és halmazműveletek eredményének leírása hasítótáblával implementált indexelt halmazzal.

a számozással pontosan azokba a kérdésekbe ütközünk, melyeket a 2.1.4. fejezetben tárgyaltam, és melyekre adott válaszok a javasolt adatszerkezethez elvezettek. Mindemellett a programozási nyelvek több univerzális beépített adatszerkezetet tartalmaznak objektumok halmazok tárolására.

### 2.2.1. Rendezett halmaz

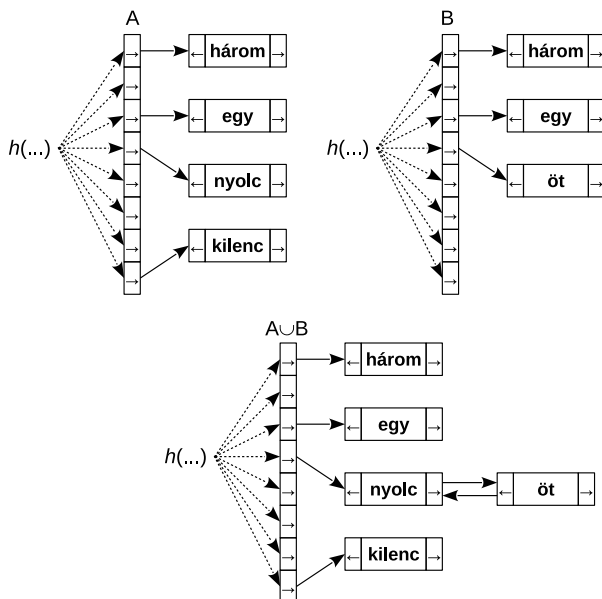
Ahogy az előző fejezetben láttuk, a rendezett halmaz a gyakorlatban egy keresőfa. Keresőfában minden olyan elem eltárolható, melyen értelmezhető rendezés. Ez karakterláncok esetén lehet azok lexikografikus rendezése, ahogy a 6. ábra mutatja.



6. ábra. Objektumhalmazok és halmazműveletek eredményének leírása keresőfával.

Általános esetben egy objektum rendezésének értelmezéséhez nem kell az összes adatát felhasználnunk, elég ha valamely egyértelmű azonosítóján értelmezett a rendezés, mert akkor az alapján a keresőfában egyértelműen megtalálható lesz. Ha nem az objektumot, hanem rá való hivatkozást tárolunk, akkor az elem keresését – a számokkal összevetésben – csak az hátráltatja, hogy az elemek rendezés szerinti összehasonlítása valójában több összehasonlítás sorozatára bomlik fel, mint a karaktersorozatok lexikografikus rendezései: azonos kezdő karakterek esetén a további karaktereket is vizsgálnunk kell.





7. ábra. Objektumhalmazok és halmazműveletek eredményének leírása hasítótáblával.

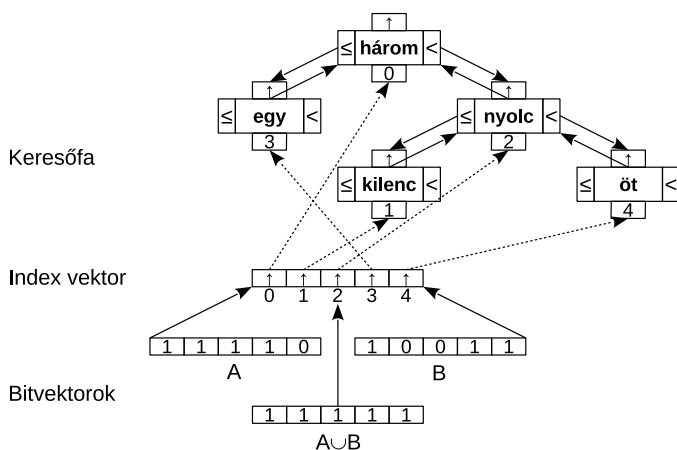
### 2.2.2. Rendezetlen halmaz

Rendezetlen halmazban való tároláshoz nem szükséges az elemeken rendezésnek léteznie. Ahogy az előző fejezetben is láthattuk, a hasítófüggvény nem feltétlenül rendezett sorrendjét adja az elemeknek. Ugyanakkor tetszőleges objektumra használható hasítófüggvényre van szükségünk, mely informatikai megvalósításban például az objektum bináris ábrázolásának bitmintái alapján hasít olyan módon, hogy továbbra is egy résztárolóba nagy valószínűséggel csak előre tervezett módon korlátozott véges számú objektum kerüljön, ahogy azt a 7. ábrán láthatjuk.

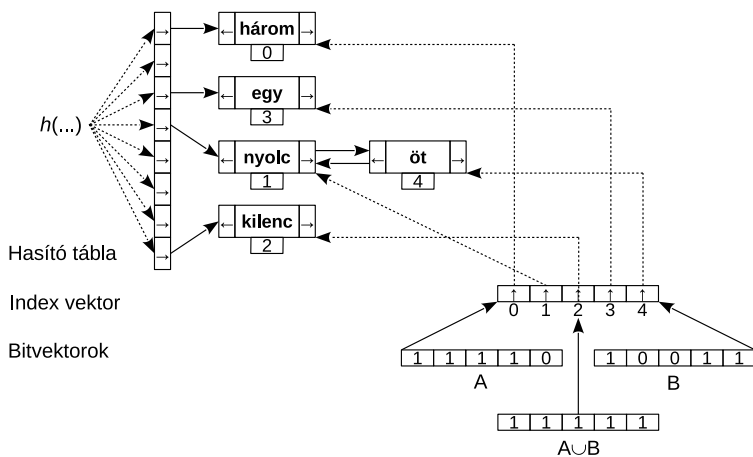
### 2.2.3. Indexelt halmaz

A 2.1.4. fejezetben bevezetett indexelt halmazok előnye, hogy bár halmazműveleteket ugyanolyan egyszerűen végezhetünk, mint bithalmazokkal, eközben tetszőleges elemet tehetünk bele, ahogy a 8. és 9. ábrán láthatjuk.

Egy ismeretlen elem beszúrása egy ilyen adatszerkezetbe persze még annál is lassabb, mintha csak egy keresőfába vagy hasítótáblába tennénk be, de a megcélzott alkalmazási terület (a folyamathálózat-szintézis eljárások) esetén, új elemek csak addig jelenhetnek meg, míg a szuperstruktúra felépül. Ha minden a szuperstruktúrában szereplő elemnek már van indexe, akkor utána csak a kapcsolódó indexekkel és azok bitvektoraival dolgozunk.



8. ábra. Objektumhalmazok és halmazműveletek eredményének leírása keresőfával implementált indexelt halmazzal.



9. ábra. Objektumhalmazok és halmazműveletek eredményének leírása hasítóábrával implementált indexelt halmazzal.

Például az 1. táblázatban látható PNS feladat maximális struktúrája 35 műveleti egységet és 65 anyagot tartalmaz, tehát összesen 100 gráf csúcsot. A mérési eredmények szerint pontosan 100-szor volt szükség új elem beszúrára a halmazműveletek során, utána már soha többet, hiába történt több százezer halmazművelet.

### 3. Adatszerkezetek implementálása

Ebben a fejezetben a halmazok és műveleteik informatikai megvalósítását tekintem át, ami alapján azok gyakorlati sebessége mérhetővé válik.

#### 3.1. Szabványos tárolók

Az adatszerkezetek mindegyikét a lehető legnagyobb sebesség elérése érdekében gépközi nyelven, C++-ban implementálok, néhány esetben közvetlen gépkódú CPU utasítások beágyazásával.

A C++ fordítók részeként kapunk szabványos, univerzálisan használható adatszerkezeteket is, a szabványos sablon könyvtár azaz Standard Template Library röviden STL elemeként. Az STL elemei a szabványos azaz sztenderd, röviden *std* névtérben találhatók, ezért az úgynevezett hatókör operátor használatával *std ::* előtaggal jelöljük őket. Ebben a gyűjteményben megtalálható az *std :: set*, ami egy keresőfa, az *std :: unordered\_set*, ami egy hasítótábla. Létezik ugyan egy *std :: bitset* is, ám annak értelmezési tartománya futási időben nem változtatható, ezért helyette – a fordítóprogram fejlesztéseinek következő lépéseit előre vetítő *boost* könyvtárból – a *boost :: dynamic\_bitset*-et használjuk bithalmazként.

#### 3.2. Indexelt halmaz

Az indexelt halmaz megvalósításához a fentiek szerint szükségünk van egy nagyon gyors tároló-kereső adatszerkezetre, ez esetünkben az *std :: unordered\_map* lesz, ami csak annyiban különbözik az *std :: unordered\_set*-től, hogy a tárolt objektum mellé az index szerinti sorszámot is be tudjuk tenni másodlagos értékként. Szükségünk van továbbá egy index tömbre, amit az *std :: vector* biztosít. Az így elkészült univerzális halmazt *objset*-nek neveztem.

##### 3.2.1. Bithalmaz megvalósítása

Az *objset* belsejében a bithalmazra használhatnánk a *boost :: dynamic\_bitset*-et, de egyrészt egy ilyen implementációt már korábban elvégeztem *smallset* néven, mintsem a *boost :: dynamic\_bitset* létezett volna. Másrészt a *smallset* megvalósításának részét képezik olyan kódrészek, amelyek a bitenkénti logikai műveleteknél a jelenlegi processzorok multimédiás kiterjesztéseit használva akár 128 bite is el tudnak végezni egy-egy művelet egyetlen CPU-ban implementált utasítással. Ezen műveletek az SSE (Streaming SIMD Extensions) utasítások között találhatók, ahol a SIMD a „Single instruction, multiple data”, tehát egyetlen utasítás több adaton rövidítése.

Fontos megjegyezni, hogy a *smallset* elnevezés arra utal, hogy a halmaz akkor hatékony, ha a tárolt számok értelmezési tartománya kicsi, tehát nem kell sokkal több bitet tárolni, mint ahányféle számmal valójában a műveletek során találkozunk. Ezt majd a mérések alapján is látni fogjuk.

## 4. Halmazműveletek sebességének tesztelése

Egy teszteléshez 100 véletlen halmazt generálok, köztük számos műveletet végeztek el mindegyik halmazleírásban. A műveletek mindegyikét 10 000-szer ismételttem, hogy az eltelt idő érdemben mérhető legyen. Végül minden mérést 100 különböző véletlen halmazkészletre ismételttem meg. Tehát összesen minden művelet esetén  $100 \times 10\,000 \times 100 = 100\,000\,000$  azaz százmillió művelet idejét mértem meg összesen. A futási idők mindenhol másodpercben értendők. A méréseket egy 3,2 GHz-es Intel i5-8250U processzoron végeztem Linux Mint operációs rendszer alatt.

### 4.1. Paraméterkészletek

A fentiekben leírtak alapján más-más környezetben az egyes halmazleírások másként viselkedhetnek, ezért négy különböző paraméterkészletet definiáltam:

1. Első esetben 0 és 255 közötti értelmezési tartományt állítok be, és 128 véletlen számot generálok minden halmazba, tehát körülbelül az értelmezési tartomány felében lesznek ténylegesen számok. Valójában valamivel kevesebb szám lesz, mert a generált számok között lehetnek azonosak.
2. Második esetben is 0 és 255 közötti értelmezési tartományt állítok be, de csak 64 véletlen számot generálok minden halmazba, tehát körülbelül az értelmezési tartomány negyedében lesznek ténylegesen számok.
3. Harmadik esetben 0 és 511 közötti értelmezési tartományt állítok be, és megint 64 véletlen számot generálok minden halmazba, tehát körülbelül az értelmezési tartomány nyolcadában lesznek ténylegesen számok.
4. Végül extrém példaként 0 és 99 999 között mindössze 100 számot generáltatok, tehát az értelmezési tartománynak csak az ezrelékét használom valójában.

Az objektumhalmazok teszteléséhez 3 és 8 karakter közötti hosszúságú véletlen karakterláncokat generálok, melyek az angol ábécé betűiből állnak.

#### 4.1.1. További implementációs megfontolások

Az egyes adatszerkezetek összehasonlíthatóságához azonos funkcionalitást kell elérnünk velük akkor is, ha a függvénykönyvtár önmagában nem minden műveletet támogat, ezért az alábbi kiegészítéseket tettem.

A *boost :: dynamic\_bitset* esetén az elemek berakása és törlése a megfelelő bitek *true*-ra illetve *false*-ra állításával történik. A *smallset* és az *objset* esetén az elemek berakása a  $+$  =, kivétele a  $-$  = operátorral történik. Az *std :: set* és *std :: unordered\_set* esetén a beszúrásra az *insert*, törlésre az *erase* függvényt tudjuk

használni. A generált véletlen számokat minden teszt esetén először egyenként betesszük, majd egyenként kivesszük a halmazból, kivéve az utolsó teszt iterációt, amikor a számok a halmazban maradnak a további halmazműveletek teszteléséhez. Az indexelt halmazok esetén – a fair összehasonlítás érdekében – minden teszt előtt az indexet is töröljük.

A *boost :: dynamic\_bitset* esetén a tartalmazást az fejezi ki, hogy az adott sorszámú logikai érték igaz-e. A *smallset* és *objset* esetén a tartalmazást a  $<$  operátorral tudjuk lekérdezni. Az *std :: set* és *std :: unordered\_set* esetén akkor szerepel egy elem a halmazban, ha rá a *find()* függvény nem *end()* értéket ad.

A *boost :: dynamic\_bitset* az uniót a  $|$ , a metszetet pedig az  $\&$  operátorokkal valósítja meg. A *smallset* és az *objset* szintén támogatják a  $|$  és  $\&$  operátorokat. Az *std :: set* esetén a függvénykönyvtár biztosítja a *set\_union* és *set\_intersection* függvényeket. Sajnos az STL-ben szereplő *set\_union* és *set\_intersection* műveletek csak rendezett halmazokon értelmezettek, ezért a rendezetlen halmaz esetén csak definíció szerint tudunk uniót és metszetet képezni, tehát unió esetén a másik halmaz elemeit is betesszük az első mellé, míg metszet esetén egy üres halmazba csak azon elemeit tesszük be az egyik halmaznak, ami a másikban is szerepel.

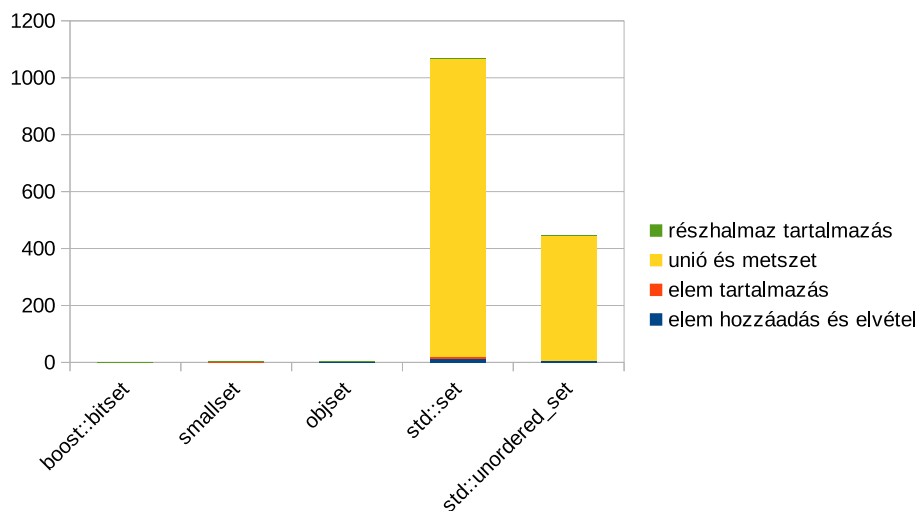
A tesztben a véletlen halmazokon végighaladva minden páros indexűt unió művelettel hozzátettük egy eredményhalmazhoz, minden páratlan indexűvel pedig metszetet képeztünk, és a metszetet tettük vissza az eredményhalmazba. Tehát felváltva bővítjük és szűkítjük az eredményhalmazt.

A részhalmaz tartalmazás vizsgálatára a *boost :: dynamic\_bitset* tartalmaz egy *is\_subset\_of* logikai függvényt. A *smallset* és *objset* esetén a részhalmaz tartalmazás a  $<$  logikai operátorral vizsgálható. Az *stl :: set*-hez a függvénykönyvtár tartalmaz egy *includes* függvényt erre a célra. Sajnos az *includes* függvény csak rendezett halmazra működik, ezért a rendezetlen *std :: unordered\_set* halmaz esetén csak definíció szerint egyenként vizsgálható, hogy az egyik halmaz minden eleme szerepel-e a másikban.

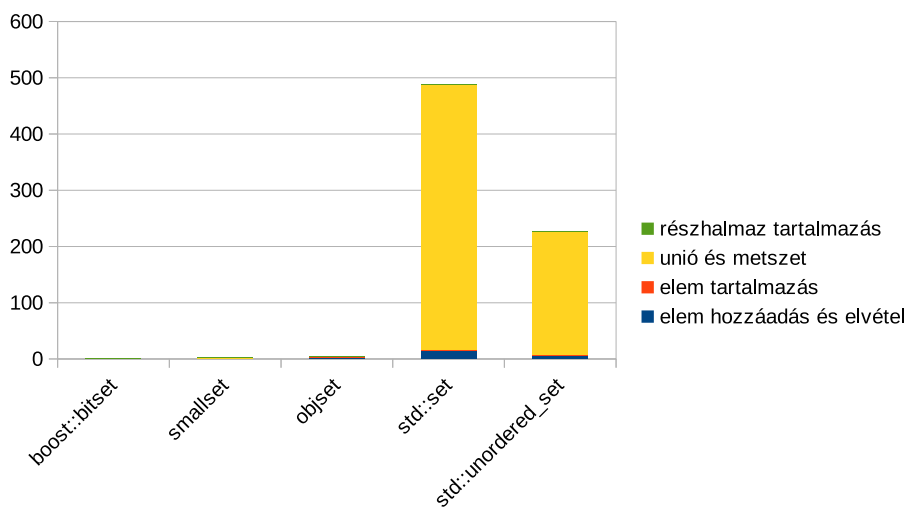
#### 4.2. Futási eredmények számhalmazokra

Ha a 10., 11. és 12. ábrákat végignézzük, akkor azt láthatjuk, hogy az 1-3 paraméterkészletek esetén a *boost :: dynamic\_bitset*, a *smallset* és az *objset* nagyságrendekkel gyorsabb, mint az *std :: set* és *std :: unordered\_set*. A legnagyobb különbség az unió és metszet műveletekben található. Ami meglepő, hogy az STL tárolók közül a keresőfával megvalósított rendezett halmazhoz képest, a hasító táblával implementált rendezetlen halmaz gyorsabb körülbelül kétszer, noha az utóbbihoz a függvénykönyvtárban nem is kapunk unió és metszet műveleteket.

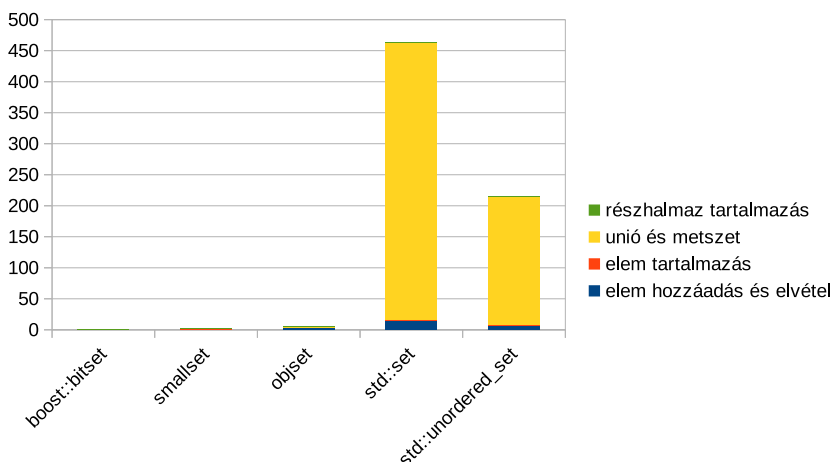
Ha csak külön a *boost :: dynamic\_bitset*, a *smallset* és az *objset* sebességét kinagyítva vizsgáljuk a 13., 14. és 15. ábrán, akkor azt láthatjuk, hogy ezek közül a *boost :: dynamic\_bitset* átlagosan gyorsabb. A legnagyobb különbség az elem beszúrásában látható, ahol nyilvánvalóan az *objset* hátrányban van, mert az a



10. ábra. Számhalmazokon végzett műveletek ideje másodpercben az első paraméterbeállítás szerint.

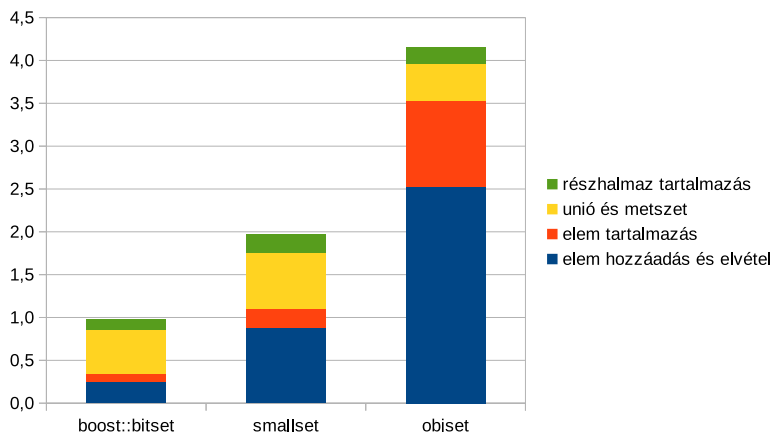


11. ábra. Számhalmazokon végzett műveletek ideje másodpercben a második paraméterbeállítás szerint.

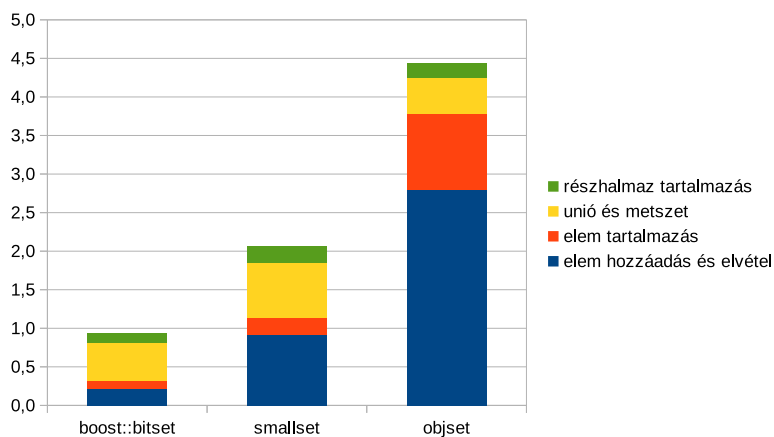


12. ábra. Számhalmazokon végzett műveletek ideje másodpercben a harmadik paraméterbeállítás szerint.

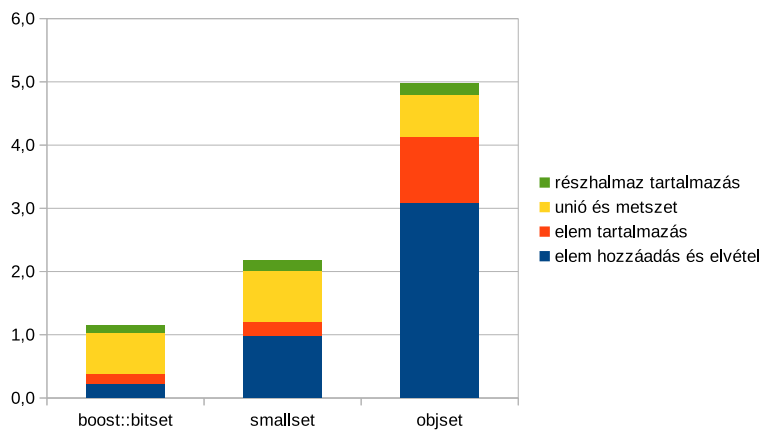
bitvektor mellett még egy dinamikus adatszerkezetet is épít. Ugyanakkor, érdemes megjegyezni, hogy ha az elemek már a halmazban vannak, akkor az unió és metszet műveletek az *objset* esetén a leggyorsabbak, köszönhetően az értelmezési tartomány tömörítésének. Ez a különbség annál szembetűnőbb, minél ritkásabb a halmaz.



13. ábra. Számhalmazokon végzett műveletek ideje másodpercben az első paraméterbeállítás szerint.



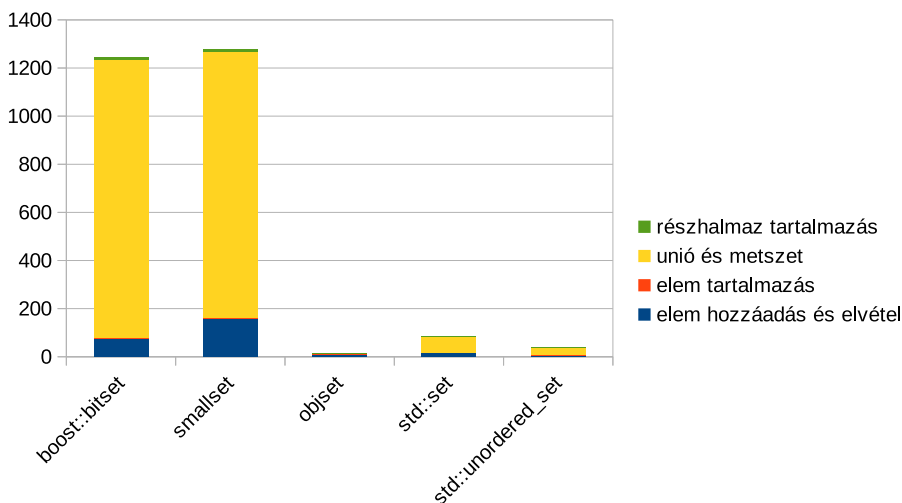
14. ábra. Számhalmazokon végzett műveletek ideje másodpercben a második paraméterbeállítás szerint.



15. ábra. Számhalmazokon végzett műveletek ideje másodpercben a harmadik paraméterbeállítás szerint.



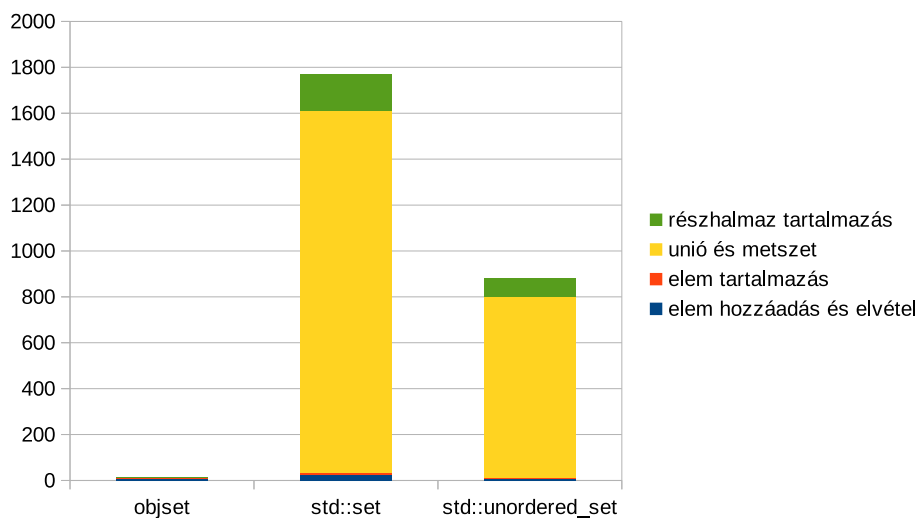
Tekintsük most külön a negyedik paraméterkészletet a 16-os ábrán. Ez az az extrém példa, amikor a tárolandó számok az értelmezési tartományuknak csak az ezredében találhatók. Ilyenkor fordul a kocka, mert kevés elemet tárolunk, de az értelmezési tartomány mérete miatt a lefoglalt bitvektorok hossza óriásira nő a *boost :: dynamic\_bitset* és a *smallset* esetén. Ebben az esetben a keresőfa és a hasítótábla sebessége jobb, de a legjobb az *objset*, köszönhetően annak, hogy tömöríti az értelmezési tartományt, és ugyanakkor gyors az unió és metszet művelete is, amit bitvektorokon végez.



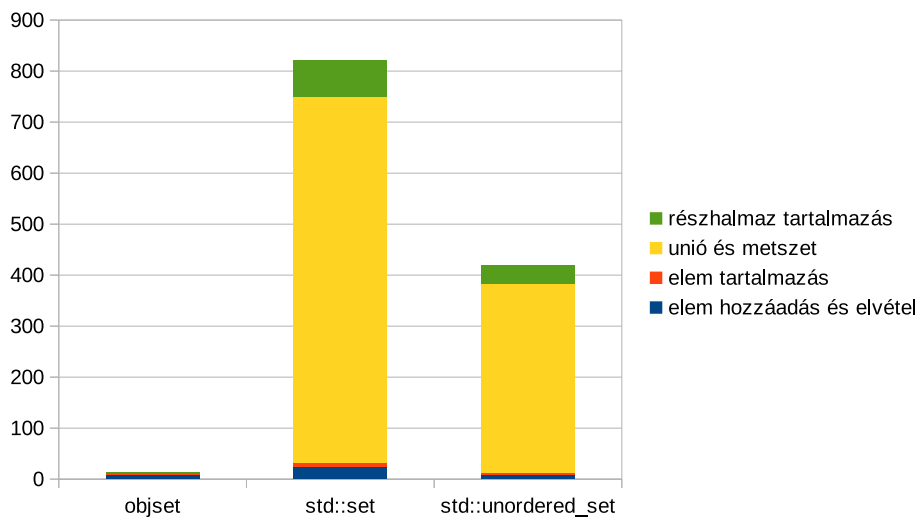
16. ábra. Számhalmazokon végzett műveletek ideje másodpercben a negyedik paraméterbeállítás szerint.

### 4.3. Futási eredmények univerzális halmazokra

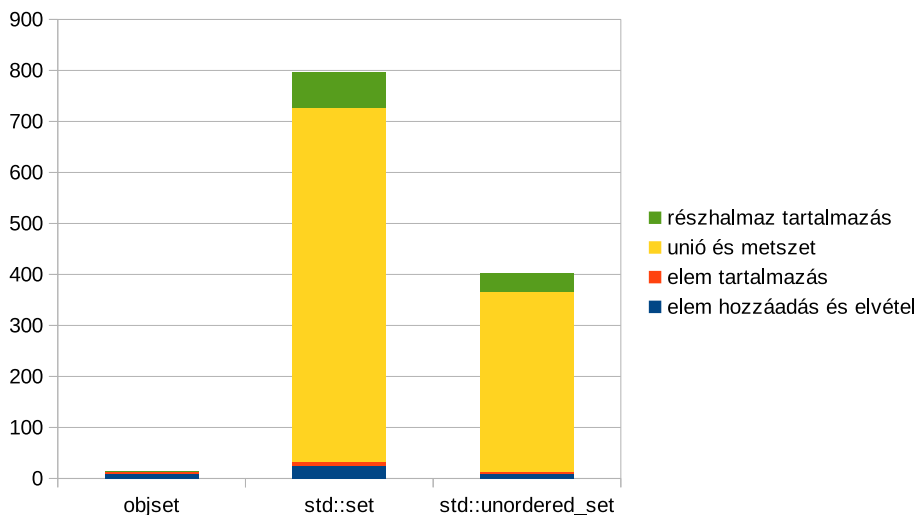
Ha azokat a halmazleírásokat vizsgáljuk, melyek tetszőleges objektum tárolására alkalmasak, akkor egyértelműen az *objset* a leghatékonyabb, a tesztekben körülbelül két nagyságrenddel kisebb időigénnyel, ahogy a 17., 18. és 19. ábrákon a futási eredményeket nézzük. A különbség nagy részét az unió és metszet műveletek adják. Itt is megjegyezzük, hogy az STL tárolók közül az a tároló, a *std :: unordered\_set* a gyorsabb körülbelül kétszer, amihez a függvénykönyvtárban nem is kapunk unió és metszet műveleteket. Tehát, halmazműveletek implementálására az *std :: set* és *std :: unordered\_set* közül akkor is az utóbbit érdemes használni, ha ahhoz nincsen meg minden művelet a függvénykönyvtárban, hanem egy részét magunknak kell megírunk.



17. ábra. Objektumhalmazokon végzett műveletek ideje másodpercben az első paraméterbeállítás szerint.



18. ábra. Objektumhalmazokon végzett műveletek ideje másodpercben a második paraméterbeállítás szerint.



19. ábra. Objektumhalmazokon végzett műveletek ideje másodpercben a harmadik paraméterbeállítás szerint.

Amennyiben az egyes halmazműveletek futási idejét súlyozzuk az 1. táblázatban szereplő előfordulási százalékokkal, majd tesztenként normalizáljuk az *objset* futási idejére, akkor a 2. táblázatban szereplő értékeket kapjuk. Ezek azt mutatják, hogy – a referenciaként használt hálózatszintézis feladatok műveletigénye alapján – hálózatszintézis feladatok esetén az *std :: set* és *std :: unordered\_set*-hez viszonyítva a jelen publikációban javasolt adatszerkezet várhatóan körülbelül 700-szor, illetve 350-szer gyorsabb.

2. táblázat. Halmazműveletek relatív időigénye alternatív megvalósítások esetén

	<i>objset</i>	<i>std :: set</i>	<i>std :: unordered_set</i>
Teszt1	1	1168,3	584,5
Teszt2	1	538,0	277,9
Teszt3	1	447,4	228,5
Átlag	1	717,9	363,7

## 5. Összefoglalás

A halmazokat megvalósítani képes adatszerkezet implementációk átfogó elemzését és tesztelését mutattam be, azzal a motivációval, hogy hálózatszintézis eljárások megvalósításához a leghatékonyabb halmazimplementációt találjuk meg. A tesztelés során megállapítást nyert, hogy az általam javasolt indexelt halmaz adatszerkezet átlagosan két nagyságrenddel ad hatékonyabb futási eredményt általános objektum halmazon végzett műveletekre, mint a leghatékonyabb ismert függvénykönyvtári megoldások. Ráadásul egyszerű számhalmazok tárolására is átlagosan az általam javasolt módszer a leghatékonyabb, ha a tárolandó számok vagy indexek értelmezési tartománya több nagyságrenddel nagyobb, mint a halmazműveletek során ténylegesen előforduló számok számossága. A javasolt indexelt halmazba új elem beszúrása kicsit lassabb, ellenben ismert elem beszúrása, az unió és metszet műveletek számolása sokkal gyorsabb a szokásos függvénykönyvtári tárolóknál. Ha a futási idők átlagát, a halmazműveleteknek a folyamatszintézis feladatok megoldása során előforduló gyakoriságával súlyozzuk, akkor a sebességekülönbség még nagyobb a javasolt új adatszerkezet javára.

Visszatérve a munkám során felmerült fejlesztésekre, megjegyzem, hogy a [4] publikációban bemutatott folyamatszintézis optimalizáló algoritmus részben azért tud versenyképes lenni nála sokkal komplexebb vegyes-egész matematikai programozási feladat megoldókkal, mert egyáltalán nem kezel egész változókat, hanem helyette a fentiekben bemutatott rendkívül hatékony *objset* halmazokkal megvalósított osztályozásokkal írja le az optimumkeresés minden döntését. A keresés során a részprobléma szétválasztás, a logikai következtetésekre épülő gyorsítások és ellentmondás-vizsgálatok is rendre halmazműveletekkel valósulnak meg, a fentiekben javasolt implementáció segítségével.

## Köszönetnyilvánítás

Ajánlom ezt a cikket Steierlein István tanár úrnak, aki befogadott a számítástechnika szakkörére, és először tanított nekem programozást és algoritmizálást a 80-as évek végén, Balatonfüreden a Radnóti Miklós Általános Iskolában, Primo 16 számítógépen.

## Hivatkozások

- [1] M. BARANY, B. BERTOK, Z. KOVACS, F. FRIEDLER AND L.T. FAN: *Solving vehicle assignment problems by process-network synthesis to minimize cost and environmental impact of transportation*, Clean Technologies and Environmental Policy, Vol. **13**, pp. 637-642 (2011). DOI: [10.1007/s10098-011-0348-2](https://doi.org/10.1007/s10098-011-0348-2)
- [2] B. BERTOK AND A. BARTOS: *Renewable energy storage and distribution scheduling for microgrids by exploiting recent developments in process network synthesis*, Journal of Cleaner Production, Vol. **244**, paper: 118520 (2020). DOI: [10.1016/j.jclepro.2019.118520](https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.118520)

- [3] B. BERTOK AND A. BARTOS: *Algorithmic Process Synthesis and Optimisation for Multiple Time Periods Including Waste Treatment: Latest Developments in P-graph Studio Software*, Chemical Engineering Transactions, Vol. **70**, pp. 97-102 (2018). DOI: [10.3303/CET1870017](https://doi.org/10.3303/CET1870017)
- [4] A. BARTOS AND B. BERTOK: *Parameter tuning for a cooperative parallel implementation of process-network synthesis algorithms*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **27**, pp. 551-572 (2019). DOI: [10.1007/s10100-018-0576-1](https://doi.org/10.1007/s10100-018-0576-1)
- [5] F. FRIEDLER, K. TARJAN, Y.W. HUANG AND L.T. FAN: *Combinatorial Algorithms for Process Synthesis*, Computers & Chemical Engineering, Vol. **16**, pp. S313-S320 (1992). DOI: [10.1016/S0098-1354\(99\)80037-9](https://doi.org/10.1016/S0098-1354(99)80037-9)
- [6] F. FRIEDLER, J.B. VARGA AND L.T. FAN: *Decision-Mapping: A Tool for Consistent and Complete Decisions in Process Synthesis*, Chemical Engineering Science, Vol. **50**, pp. 1755-1768 (1995). DOI: [10.1016/0009-2509\(95\)00034-3](https://doi.org/10.1016/0009-2509(95)00034-3)
- [7] F. FRIEDLER, J.B. VARGA, E. FEHER AND L.T. FAN: *Combinatorially Accelerated Branch-and-Bound Method for Solving the MIP Model of Process Network Synthesis*, In State of the Art in Global Optimization, Springer, pp. 609-626 (1996). DOI: [10.1007/978-1-4613-3437-8\\_35](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3437-8_35)
- [8] Z. KOVACS, Z. ERCSEY, F. FRIEDLER AND L.T. FAN: *Separation-Network Synthesis: Global Optimum through Rigorous Super-Structure*, Computers & Chemical Engineering, Vol. **24**, pp. 1881-1900 (2000). DOI: [10.1016/S0098-1354\(00\)00568-8](https://doi.org/10.1016/S0098-1354(00)00568-8)
- [9] N.L. BIGGS, E.K. LLOYD AND R.J. WILSON: *Graph Theory*, Oxford University Press, pp. 1736-1936 (1976).
- [10] F. FRIEDLER, K. TARJAN, Y.W. HUANG AND L.T. FAN: *Graph-Theoretic Approach to Process Synthesis: Polynomial Algorithm for Maximal Structure Generation*, Computers & Chemical Engineering, Vol. **17**, pp. 929-942 (1993). DOI: [10.1016/0098-1354\(93\)80074-W](https://doi.org/10.1016/0098-1354(93)80074-W)
- [11] J. LIU, L.T. FAN, P. SEIB, F. FRIEDLER AND B. BERTOK: *Downstream Process Synthesis for Biochemical Production of Butanol, Ethanol, and Acetone from Grains: Generation of Optimal and Near-Optimal Flowsheets with Conventional Operating Units*, Biotechnology Progress, Vol. **20**, pp. 1518-1527 (2004). DOI: [10.1021/bp049845v](https://doi.org/10.1021/bp049845v)
- [12] B. BERTOK AND I. HECKL: *Process Synthesis by the P-Graph Framework Involving Sustainability*, In Sustainability in the Design, Synthesis and Analysis of Chemical Engineering Processes, Butterworth-Heinemann, pp. 203-225 (2016). DOI: [10.1016/B978-0-12-802032-6.00009-8](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-802032-6.00009-8)
- [13] M. BARANY: *Modeling Vehicle Routing Problems as Process-Network Synthesis Problems*, Industrial Applications of the P-Graph Framework, PhD dissertation, University of Pannonia (2015). DOI: [10.18136/PE.2015.595](https://doi.org/10.18136/PE.2015.595)
- [14] D.E. KNUTH: *The Art of Computer Programming, Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, Vol. **1**, (1968).
- [15] D.E. KNUTH: *The Art of Computer Programming, Sorting and Searching*, Addison-Wesley, Vol. **3**, (1973).
- [16] F. FRIEDLER, K. TARJAN, Y. W. HUANG AND L.T. FAN: *Graph-Theoretic Approach to Process Synthesis: Axioms and Theorems*, Chemical Engineering Science, Vol. **47**, pp. 1973-1988 (1992). DOI: [10.1016/0009-2509\(92\)80315-4](https://doi.org/10.1016/0009-2509(92)80315-4)

- [17] HECKL I.: *Az SNS-Multi feladat redukált szuperstruktúrája*, Szétválasztási hálózatok szintézise: Különböző tulajdonságokon alapuló szétválasztó módszerek egyidejű alkalmazása, PhD értekezés, Pannon Egyetem (2007).  
[https://konyvtar.uni-pannon.hu/doktori/2007/Heckl\\_Istvan\\_dissertation.pdf](https://konyvtar.uni-pannon.hu/doktori/2007/Heckl_Istvan_dissertation.pdf)
- [18] M. FRITS AND B. BERTOK: *Scheduling Custom Printed Napkin Manufacturing by P-graphs*, Computers & Chemical Engineering, Vol. **141**, 107017 (2020). DOI: [10.1016/j.compchemeng.2020.107017](https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2020.107017)
- [19] E. KONIG AND B. BERTOK: *Process Graph Approach for Two-Stage Decision Making: Transportation Contracts*, Computers & Chemical Engineering, Vol. **121**, pp. 1-11 (2019). DOI: [10.1016/j.compchemeng.2018.07.011](https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2018.07.011)
- [20] L.T. FAN, B. BERTOK AND F. FRIEDLER: *A Graph-Theoretic Method to Identify Candidate Mechanisms for Deriving The Rate Law of a Catalytic Reaction*, Computers & Chemistry, Vol. **26**, pp. 265-292 (2002). DOI: [10.1016/S0097-8485\(01\)00119-X](https://doi.org/10.1016/S0097-8485(01)00119-X)
- [21] J.C. GARCIA-OJEDA, B. BERTOK AND F. FRIEDLER: *Planning evacuation routes with the P-graph framework*, Chemical Engineering Transactions, Vol. **29**, pp. 1531-1536 (2012). DOI: [10.3303/CET1229256](https://doi.org/10.3303/CET1229256)
- [22] M. BARANY, B. BERTOK, Z. KOVACS, F. FRIEDLER AND L.T. FAN, *Solving vehicle assignment problems by process-network synthesis to minimize cost and environmental impact of transportation*, Clean Technologies and Environmental Policy, Vol. **13**, 637-642 (2011). DOI: [10.1007/s10098-011-0348-2](https://doi.org/10.1007/s10098-011-0348-2)
- [23] L. VANCE, H. CABEZAS, I. HECKL, B. BERTOK AND F. FRIEDLER, *Synthesis of sustainable energy supply chain by the P-graph framework*, Industrial & Engineering Chemistry Research, Vol. **52**, pp. 266-274 (2013). DOI: [10.1021/ie3013264](https://doi.org/10.1021/ie3013264)



Bertók Botond 1976-ban született Veszprém-ben. 1999-ben okleveles mérnök informatikus-ként végzett a Veszprémi Egyetemen. 2004-ben szerzett PhD fokozatot. Mérai László és Polinszky díjas. OTDT Mestertanár Aranyérmes. Jelenleg a Pannon Egyetem egyetemi docense. Kutatási területe üzleti- és műszaki folyamatok optimalizálása és számítógépes döntéstámogatása. 50 referált nemzetközi folyóirat publikáció és 8 könyvfejezet szerzője. Független hivatkozásainak száma több mint 700. 2000 óta a Magyar Operációkutatási Társaság, 2012-től az MTA Informatikai Tudományos Bizottság tagja.

BERTÓK BOTOND

Pannon Egyetem,  
Veszprém, Egyetem utca 10.  
[bertok@dcs.uni-pannon.hu](mailto:bertok@dcs.uni-pannon.hu)

HYBRID DATA STRUCTURE FOR EFFICIENT IMPLEMENTATION OF SET  
OPERATIONS

BOTOND BERTOK

The description of combinatorial or mixed integer optimization algorithms often includes sets and operations on them. Many of the combinatorial algorithms have a theoretically high computational complexity, so the size of the practically solvable problems highly depends on the quality of the implementation. Software implementation of set operations is not trivial. As I present in the article, there may be magnitude differences between the speeds of set operations, depending on what data structure the set actually covers.

As a new result, I propose a hash table – bit set hybrid data structure for software implementation of object sets that can run up to multiple orders of magnitude faster than the C++ library data structures included in the latest compilers.

*Keywords:* set operations, C++, combinatorial algorithms.

*Mathematics Subject Classification* (2000): 03C62 Models of arithmetic and set theory; 68P05 Data structures.

## SZTOCHASZTIKUS GARANCIÁK BINÁRIS KLASSZIFIKÁCIÓHOZ

TAMÁS AMBRUS ÉS CSÁJI BALÁZS CSANÁD

A bináris klasszifikáció a statisztikus tanuláselmélet egyik alapvető problémája. A jelen cikk célja a kimenetek bemenetekre nézve vett feltételes várható értékének – a regressziós függvénynek – megbecslése és a becslés bizonytalanságának vizsgálata. A regressziós függvény előjele meghatározza a Bayes optimális osztályozót, segítségével a félreosztályozás kockázata is kiszámolható. Bevezetünk egy újramintavételezésen alapuló keretrendszert és három kernel-alapú algoritmust, amelyek gyenge feltételek mellett képesek egzakt, nem-aszimptotikus konfidenciahalmazokat konstruálni a regressziós függvényhez, és erősen konzisztensek is.

### 1. Bevezetés

Az osztályozás vagy klasszifikáció a *statisztikus tanuláselmélet* [10] egyik alapvető problémája, amelyet számtalan területen (pénzügy, egészségügy, ipar, stb.) alkalmaznak. A (bináris) klasszifikáció során adott egy független azonos eloszlású (i.i.d.) minta,  $\mathcal{D}_0 = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ , az  $(X, Y)$  véletlen vektor ismeretlen eloszlásából,  $P$ , ahol  $x_i$  az  $i$ -edik bemenet és  $y_i \in \{+1, -1\}$  az  $i$ -edik megfigyelés címkéje.

*Osztályozóknak* nevezzük a  $g : \mathbb{X} \rightarrow \{+1, -1\}$  alakú (mérhető) függvényeket. Általában a klasszifikáció célja, hogy minimalizálja az a priori kockázatot, az  $R(g) \doteq \mathbb{E}[L(Y, g(X))]$  függvényt, ahol  $L$  egy tetszőleges (mérhető) veszteségfüggvény. Bayes optimális osztályozónak hívjuk és  $g_*$ -gal jelöljük azt a függvényt, ahol ez a minimum felvétel. Ebben a cikkben a 0 / 1 veszteségfüggvényt használjuk, azaz  $L(y, g(x)) \doteq \mathbb{I}(g(x) \neq y)$ , ahol  $\mathbb{I}$  az indikátor függvény. Ebben az esetben az a priori kockázat a félreosztályozás valószínűsége,  $R(g) = \mathbb{P}(g(X) \neq Y)$ , és levezethető [4], hogy minden  $x \in \mathbb{X}$  esetén  $g_*(x) = \text{sign}(\mathbb{E}[Y | X = x])$ . Vegyük észre, hogy a feltételes várható érték függvény  $f_*(x) \doteq \mathbb{E}[Y | X = x]$ , amit a továbbiakban *regressziós függvénynek* nevezünk, több információt hordoz magában, mint  $g_*$ , ui.  $f_*$ -ból maga a kockázat is kiszámolható. Ezért a jelen cikk a regressziós függvényhez adható sztochasztikus garanciákkal foglalkozik. Fő újdonsága egy *újramintavételezésen* alapuló keretrendszer bevezetése, amelynek segítségével *nem-aszimptotikusan* garantált, *egzakt* konfidenciahalmazokat építhetünk, melyek – a megfigyelések eloszlásától függetlenül – egy tetszőleges, előre meghatározott



valószínűséggel tartalmazza a regressziós függvényt. A javasolt – Monte Carlo és bootstrap tesztekhez hasonló – keretrendszert véges-mintás rendszer identifikációs módszerek [2] motiválták.

A konfidenciahalmazokat egy adott modellosztályban konstruáljuk meg, ami lehet tetszőlegesen tág, akár végtelen dimenziós is. A javasolt keretrendszer segítségével három kernel-alapú algoritmust [3] is bevezetünk, amelyek *egzakt* konfidenciatartományokat konstruálnak, valamint *erősen konzisztensek*, azaz a hamis modellek – gyenge feltételek mellett – a mintaméret növekedésével egy valószínűséggel kikerülnek a konstruált konfidenciahalmazokból.

## 2. Reprodukáló magú Hilbert-terek

Legyen adott egy  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  alakú függvényekből álló Hilbert-tér,  $\mathcal{H}$ , a hozzátartozó  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  skalárszorozattal. Azt mondjuk, hogy  $\mathcal{H}$  egy *reprodukáló magú Hilbert-tér* (RKHS), ha a kiértékelő lineáris funkcionál  $\delta_x : f \rightarrow f(x)$  minden  $x \in \mathbb{X}$  esetén korlátos. Ekkor a Riesz reprezentációs tétel alapján létezik  $k(\cdot, \cdot)$ , hogy minden  $x \in \mathbb{X}$  esetén  $k(\cdot, x) \in \mathcal{H}$  és  $f(x) = \langle f, k(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}}$ . Ezt hívjuk a *reprodukáló tulajdonságnak* és a  $k : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt a *kernelnek*. Speciálisan  $\langle k(\cdot, x), k(\cdot, y) \rangle_{\mathcal{H}} = k(x, y)$ , amiből következik, hogy  $k$  szimmetrikus és pozitív definit. Megfordítva, minden szimmetrikus, pozitív definit függvény egyértelműen meghatároz egy RKHS-t (ld. Moore–Aronszajn tétel [1]). A legelterjedtebb kernelnek közé tartozik a Gauss kernel,  $k(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2 / 2\sigma^2)$  ahol  $\sigma > 0$  és a polinomiális kernel,  $k(x, y) = (x^T y + c)^d$  ahol  $c \geq 0$  és  $d \in \mathbb{N}$ .

Egy adott  $\mathcal{D}_0$  mintához tartozó ún. Gram mátrix,  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , a kernel értékek segítségével határozható meg:  $K_{i,j} \doteq k(x_i, x_j)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Megmutatható, hogy ez mindig egy (adatfüggő) szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix.

Legyen most  $\mathbb{X}$  egy metrikus tér és  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{X}$  kompakt. Jelölje továbbá  $C(\mathbb{Z})$  a  $\mathbb{Z}$ -n értelmezett folytonos függvények terét a supremum norma által generált metrikával és  $\mathcal{H}(\mathbb{Z}) \doteq \text{span}\{k(\cdot, z) : z \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{H}$ , azaz a  $k(\cdot, z)$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ , függvények által kifeszített teret. Azt mondjuk, hogy egy  $k$  kernel *univerzális*, ha minden  $\mathbb{Z}$  kompakt halmaz,  $f \in C(\mathbb{Z})$  függvény és  $\varepsilon > 0$  esetén létezik  $h \in \mathcal{H}(\mathbb{Z})$ , hogy  $\sup_{x \in \mathbb{Z}} |f(x) - h(x)| < \varepsilon$ , azaz  $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$  *sűrű* a  $C(\mathbb{Z})$  térben az uniform topológiával.

Egyik fontos alkalmazása az RKHS-eknek a *kernel átlag beágyazás* [8], amely eloszlásokhoz rendel RKHS-beli elemeket, a kernel segítségével:

**2.1. Definíció.** Legyen  $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$  egy mérhető tér és jelölje  $M_+(\mathbb{X})$  a valószínűségi mértékek halmazát ezen a téren. Ezeknek a valószínűségi mértékeknek egy  $k$  kernellel ellátott  $\mathcal{H}$  RKHS-be való átlag beágyazását az alábbi módon definiáljuk:

$$\mu : M_+(\mathbb{X}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad \text{és} \quad \mu(P) = \int k(x, \cdot) dP(x), \quad (1)$$

feltéve, hogy ez a Bochner integrál létezik.

A kernelt *karakterisztikusnak* hívjuk, ha az imént definiált beágyazás,  $\mu$ , injektív. Ekkor a beágyazott elem megőrzi az eloszlásban rejlő információt, például minden  $P, Q \in M_+(\mathbb{X})$  esetén,  $\|\mu(P) - \mu(Q)\|_{\mathcal{H}} = 0$  pontosan akkor, ha  $P = Q$ .

Belátható, hogy a Gauss kernel univerzális és karakterisztikus is; valamint ha  $\mathbb{X}$  kompakt, akkor az univerzalitásból már következik is a karakterisztikusság [8].

A mi esetünkben a minta eloszlása ismeretlen, ezért a beágyazását is csak becslülni tudjuk a tapasztalati eloszlás segítségével. Ezt többek között azért tehetjük meg, mert a *nagy számok erős törvénye* (NSzET) általánosítható olyan véletlen elemekre is, amelyek értéküket egy szeparábilis Hilbert-térből veszik [9]:

2.1. TÉTEL. Legyen  $\{X_n\}$  független véletlen elemek sorozata egy  $\mathcal{H}$  szeparábilis Hilbert-térből. Vezessük be a  $\text{Var}(X) \doteq \mathbb{E}[\|X - \mathbb{E}[X]\|_{\mathcal{H}}^2]$  jelölést. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < \infty \quad \implies \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X_k]) \rightarrow 0, \quad (2)$$

egy valószínűséggel,  $n \rightarrow \infty$  esetén, a skalárszorzat által indukált metrikában.

### 3. Újramintavételező eljárás

Először azt a keretrendszert mutatjuk be, amelynek segítségével olyan konfidenciahalmazok konstruálhatók, amelyek a regressziós függvényt,  $f_*$ -ot, pontosan egy általunk megválasztott valószínűséggel tartalmazzák a minta méretétől függetlenül. Korábban már említettük, hogy a vizsgált regressziós függvény megegyezik a feltételes várható érték függvényével, és a következő alakban írható

$$f_*(x) \doteq \mathbb{E}[Y \mid X = x] = 2 \cdot \mathbb{P}(Y = +1 \mid X = x) - 1. \quad (3)$$

A továbbiakban fel fogjuk tenni, hogy

- (A0)  $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^d$  és az  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$  minta független, azonos eloszlású (i.i.d.);
- (A1) adott (mérhető) regressziós függvényeknek egy paraméterezett  $\mathcal{F}$  családja, amely tartalmazza  $f_*$ -ot, azaz  $f_* \in \mathcal{F} \doteq \{f_\theta : \mathbb{X} \rightarrow [-1, +1] \mid \theta \in \Theta\}$ ;
- (A2) a paraméterezés injektív, azaz minden  $\theta_1 \neq \theta_2 \in \Theta$  esetén

$$\|f_{\theta_1} - f_{\theta_2}\|_P^2 \doteq \int_{\mathbb{X}} (f_{\theta_1}(x) - f_{\theta_2}(x))^2 dP_X(x) \neq 0, \quad (4)$$

ahol  $P_X$  a bemenetek eloszlása (a  $P$  eloszlás egy peremeloszlása).

Az egyszerűség kedvéért úgy tekintünk  $\Theta$ -ra, mint paraméterterre, de nem tesszük fel, hogy ez véges dimenziós, például maguk a függvények is lehetnek a paraméterek. Az optimális  $f_*$ -hoz tartozó paramétert  $\theta^*$ -gal jelöljük, azaz  $f_* = f_{\theta^*}$ .

Az újramintavételezés során az i.i.d. tulajdonságból fogunk kiindulni. Az ötletünk az, ha adott egy  $\theta$  paraméter, akkor generálhatunk alternatív címkéket a

meglévő bemenetekhez a paraméterhez tartozó feltételes eloszlás segítségével, ami leírható a következőképpen:

$$\mathbb{P}_\theta(Y = +1 \mid X = x) = \frac{f_\theta(x) + 1}{2}, \quad \mathbb{P}_\theta(Y = -1 \mid X = x) = \frac{1 - f_\theta(x)}{2}. \quad (5)$$

Adott  $\theta$  esetén generálunk  $m - 1$  új *alternatív mintát*, azaz legyen

$$\mathcal{D}_i(\theta) \doteq ((x_1, y_{i,1}(\theta)), \dots, (x_n, y_{i,n}(\theta))), \quad (6)$$

minden  $i = 1, \dots, m - 1$  esetén, ahol minden  $(i, j)$  párra  $y_{i,j}(\theta)$  egy véletlen generált változó a  $\mathbb{P}_\theta(Y \mid X = x_j)$  feltételes eloszlásból. Az egyszerűség kedvéért ezt a jelölést kiterjesztjük a  $\mathcal{D}_0$  esetre, azaz  $\forall \theta : \mathcal{D}_0(\theta) \doteq \mathcal{D}_0$  és  $\forall j : y_{0,j}(\theta) \doteq y_j$ .

Természetesen minden mintát tekinthetünk egy  $n$  dimenziós véletlen vektornak és  $\mathcal{D}_1(\theta), \dots, \mathcal{D}_{m-1}(\theta)$  mindig feltételesen függetlenek adott bemenetek esetén. Az egyik legfontosabb észrevételünk, hogy ha  $\theta \neq \theta^*$ , akkor  $\mathcal{D}_0$  eloszlása általában különbözik a többi minta eloszlásától. Ez a különbség egy statisztikai próbával kimutatható. Mindazonáltal  $\mathcal{D}_0$  és  $\mathcal{D}_i(\theta^*)$  eloszlása megegyezik minden  $i$  esetén, így a minták statisztikailag nem különböztethetők meg ebben az esetben. Ezek alapján a módszerünk a következő lesz: ha a generált minták jelentősen eltérnek az eredetitől, akkor kizárjuk a vizsgált paramétert, míg ellenkező esetben elfogadjuk a paraméter által állított hipotézist. A minták összehasonlítását sokféleképpen végezhetjük. Erre a célra bevezetjük a *rangsoroló függvény* fogalmát.

**3.1. Definíció.** Legyen  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^r$  és  $[m] \doteq \{1, \dots, m\}$ . Egy  $\psi : \mathbb{A}^m \rightarrow [m]$  típusú (mérhető) függvényt rangsoroló függvénynek nevezünk, ha minden lehetséges  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{A}^m$  esetén teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

(P1) A  $\{2, \dots, m\}$  halmaz minden  $\mu$  permutációjára

$$\psi(a_1, a_2, \dots, a_m) = \psi(a_1, a_{\mu(2)}, \dots, a_{\mu(m)}), \quad (7)$$

azaz a függvény invariáns az utolsó  $m - 1$  elem sorrendmódosítására.

(P2) Minden  $i, j \in [m]$  esetén, ha  $a_i \neq a_j$ , akkor

$$\psi(a_i, \{a_k\}_{k \neq i}) \neq \psi(a_j, \{a_k\}_{k \neq j}), \quad (8)$$

ahol az egyszerűsített jelölést (P1) indokolja.

A  $\psi$  függvény kimenetét *rangnak* nevezzük. A következő lemma egy fontos észrevétel a *felcserélhető* véletlen vektorok rangsorolásával kapcsolatban:

**3.1. SEGÉDTÉTEL.** Legyenek  $A_1, \dots, A_m$  *felcserélhető*, *m. m. páronként különböző véletlen vektorok*  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^r$ -ből. Ekkor  $\psi(A_1, A_2, \dots, A_m)$  eloszlása *diszkrét egyenletes*, azaz minden  $k \in [m]$  esetén, a rang  $k$  pontosan  $1/m$  valószínűséggel.

Vegyük észre, hogy ez a lemma az  $\{A_i\}$  véletlen vektorok eloszlásától függetlenül teljesül. Az állítás a felcserélhetőségen múlik, ami a  $\theta^*$  segítségével generált minták és az eredeti minta esetében fennáll. A páronkénti különbözőség szükséges feltétel ugyan, de általában kibővíthetjük a mintáinkat egy véletlen permutáció,  $\pi$ , különböző elemeivel  $\mathcal{D}_i^\pi(\theta) \doteq (\mathcal{D}_i(\theta), \pi(i))$  minden  $i = 0, \dots, m - 1$  esetén, hogy a páronkénti különbözőséget biztosítsuk. Ezzel a bővítéssel a lemmát általánosan is alkalmazhatjuk tetszőleges felcserélhető elemekre.

#### 4. Nem-aszimptotikus konfidenciahalmazok

Legyen adott egy rangsoroló függvény,  $\psi$ , ami a kiterjesztett mintákon van értelmezve, azaz  $\psi : (\mathbb{X} \times \mathbb{Y})^m \times [m] \rightarrow [m]$ . Továbbá legyenek  $p, q \in [m]$  tetszőleges segédparaméterek úgy, hogy  $p \leq q$  teljesül. A  $\psi$  függvény által meghatározott *konfidenciahalmazt* definiáljuk a következő módon:

$$\Theta_{\varrho}^{\psi} \doteq \{ \theta \in \Theta : p \leq \psi(\mathcal{D}_0^{\pi}, \{\mathcal{D}_k^{\pi}(\theta)\}_{k \neq 0}) \leq q \}, \quad (9)$$

ahol  $\varrho \doteq (m, p, q)$  a segédparamétereket jelöli. Látni fogjuk, hogy  $m, p$  és  $q$  általunk választható meg és ezek segítségével könnyedén beállítható a konfidenciaszint. A 3.1 Segéd-tétel segítségével belátható az alábbi általános tétel, ami egyben a cikk egyik legfontosabb eredményét képezi.

**4.1. TÉTEL.** *Az A0, A1 és A2 feltételek mellett, minden  $\psi$  rangsoroló függvény és  $\varrho = (m, p, q)$  egész segédparaméterek esetén, amelyekre fennál  $1 \leq p \leq q \leq m$ ,*

$$\mathbb{P}(\theta^* \in \Theta_{\varrho}^{\psi}) = \frac{q - p + 1}{m}. \quad (10)$$

A tétel nagyon általánosan garantálja az „igazi” regressziós függvény,  $f_*$ , *egzakt* tartalmazási valószínűségét, nem függ a minta eloszlásától – azaz *eloszlás-független* – és a rangsoroló függvény megválasztásától sem. *Nem-aszimptotikus* eredmény, tehát a konfidenciaszintet a minta mérete nem befolyásolja, sőt, azt mi állíthatjuk be  $p, q$  és  $m$  megválasztásával. Világos, hogy tetszőleges (racionális) szint elérhető. A  $p$  paramétert ebben a cikkben minden alkalommal 1-nek választjuk meg, ezért a későbbiekben áttérünk a  $\varrho = (m, q)$  jelölésre.

Egy konfidenciahalmaz mindig alkalmas *hipotézisvizsgálatra* is. Ebben az esetben egy rangsoroló függvény segítségével tetszőleges regressziós függvény jelölt tesztelhető, azaz meghatározhatunk egy *statisztikai próbát*, ami elfogadja azt a nullhipotézist, hogy a regressziós függvény megegyezik a jelölttel, ha a rang értéke  $p$  és  $q$  közé esik. A tétel ilyenkor a próba szintjét határozza meg egzakt módon, amiből az *elsőfajú hiba* valószínűsége is meghatározható.

Az általánosságból adódóan ez a tétel megengedi patológikus rangsoroló függvények használatát, például olyanokét, amelyek csak a mintákhoz csatolt véletlen permutációtól függnék. Természetesen ezeket szeretnénk elkerülni, ezért vizsgáljuk a konfidenciahalmazaink egy másik tulajdonságát az ún. *erős konzisztenciát*. Intuitívan, egy erősen konzisztens módszer esetén a rossz paraméterek a mintaszám növekedésével kikerülnek a konstruált konfidenciahalmazokból.

**4.1. Definíció.** Jelölje az  $n$  elemű mintára konstruált konfidenciahalmazt  $\Theta_{\varrho, n}^{\psi}$ . Egy módszert erősen konzisztensnek nevezünk, ha  $\forall \theta \neq \theta^*, \theta \in \Theta$  esetén:

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{ \theta \in \Theta_{\varrho, n}^{\psi} \} \right) = 0. \quad (11)$$

Az erős konzisztencia a konfidenciahalmazhoz kapcsolódó próba esetében a *másodfajú hibára* ad aszimptotikus garanciát, ugyanis azokat a konfidenciahalmaz-sorozatokot tekintjük erősen konzisztensnek, amelyek 1 valószínűséggel csak véges sok  $n$ -re fogadnak el egy „rossz” hipotézist. Ebből következik, hogy ilyenkor a „rossz” hipotézisek elfogadási valószínűsége – azaz a próba másodfajú hibájának valószínűsége – nullához tart, amit egy próba konzisztenciájának szoktak nevezni.

A továbbiakban bevezetünk három algoritmust, amelyek egzakt és erősen konzisztens konfidenciahalmazokat konstruálnak egy-egy kernel-módszer segítségével.

#### 4.1. Algoritmus I (szomszédság alapú)

Az első algoritmus a  $k$ -legközelebbi szomszéd (kNN) módszerből indul ki. Az az ötlet, hogy adott  $\theta$  esetén megbecsüljük az  $f_\theta$  függvényt külön-külön minden mintából a kNN módszer segítségével. Ezeket a becsléseket aszerint fogjuk összehasonlítani, hogy melyikük becsli pontosabban az  $f_\theta$  függvényt.

Az első algoritmushoz feltesszük a következőket:

(B1)  $\mathbb{X}$  kompakt,

(B2) a bemenetek eloszlásának tartója az egész  $\mathbb{X}$ , azaz  $\text{supp } P_X = \mathbb{X}$ ,

(B3)  $P_X$  abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve.

A kNN becsléseket definiálhatjuk a következő módon

$$f_{\theta,n}^{(i)}(x) \doteq \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^n y_{i,j}(\theta) \mathbb{I}(x_j \in N(x, k_n)), \quad (12)$$

ahol  $N(x, k_n)$  jelöli az  $x$  pont  $k_n$  legközelebbi szomszédját az  $\{x_j\}_{j=1}^n$  halmazból. Az euklidészi metrikát használjuk  $\mathbb{X}$ -en a szomszédok meghatározásához. Mivel  $P_X$  abszolút folytonos, (12) Lebesgue-majdnem mindenütt jól-meghatározott.

Tekintsük a becsléseink  $L^2$ -hibáját, azaz minden  $i = 0, \dots, m-1$  esetén legyenek a  $Z_n^{(i)}(\theta)$  referenciaváltozók a következők:

$$Z_n^{(i)}(\theta) \doteq \|f_\theta - f_{\theta,n}^{(i)}\|_2^2 = \int_{\mathbb{X}} (f_\theta(x) - f_{\theta,n}^{(i)}(x))^2 dx. \quad (13)$$

A rangsoroló függvényt ezek segítségével a következő alakban írjuk fel:

$$\mathcal{R}_n(\theta) \doteq 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \mathbb{I}(Z_n^{(i)}(\theta) \prec_\pi Z_n^{(0)}(\theta)), \quad (14)$$

ahol „ $\prec_\pi$ ” egy szigorú rendezés a  $Z_n^{(0)}(\theta), \dots, Z_n^{(m-1)}(\theta)$  elemeken a következőképpen definiálva:  $Z_n^{(k)}(\theta) \prec_\pi Z_n^{(j)}(\theta)$  akkor és csak akkor, ha  $Z_n^{(k)}(\theta) < Z_n^{(j)}(\theta)$  vagy  $Z_n^{(k)}(\theta) = Z_n^{(j)}(\theta)$ , illetve  $\pi(k) < \pi(j)$ . A korábban használatos jelölésekkel az első algoritmusban

$$\psi(\mathcal{D}_0^\pi, \{\mathcal{D}_k^\pi(\theta)\}_{k \neq 0}) = \mathcal{R}_n(\theta). \quad (15)$$

A konfidenciahalmaz az előzőek alapján a következő alakban adódik:

$$\Theta_{\varrho,n}^{(1)} \doteq \{ \theta \in \Theta : \mathcal{R}_n(\theta) \leq q \}, \quad (16)$$

ahol  $\varrho \doteq (m, q)$ ,  $1 \leq q \leq m$  általunk választott egész értékű segédparaméterek. A 4.2 tétel foglalja össze az első algoritmus fontos tulajdonságait.

4.2. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy A0, A1, A2, B1, B2 és B3 teljesül. Ekkor*

$$\mathbb{P}(\theta^* \in \Theta_{\varrho,n}^{(1)}) = q/m, \quad (17)$$

*minden mintaméretre. Továbbá, ha  $\{k_n\}$  olyan, hogy  $k_n \rightarrow \infty$  és  $k_n/n \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ , és  $q < m$ , akkor Algoritmus I erősen konzisztens (11).*

Az világos, hogy  $\{f_{\theta,n}^{(i)}\}$  pontosan kiszámolható az adatokból, és szakaszonként konstans. Továbbá  $\|f_{\theta,n}^{(i)} - f_\theta\|_2^2$  szintén pontosan megkapható, tehát az algoritmusunk gyakorlatban is megvalósítható. Mindazonáltal sok esetben gyorsabb, ha Monte Carlo (MC) módszerrel közelítjük az integrálok értékeit:

$$\|f_{\theta,n}^{(i)} - f_\theta\|_2^2 \approx \frac{1}{\ell_n} \sum_{k=1}^{\ell_n} (f_{\theta,n}^{(i)}(\bar{x}_k) - f_\theta(\bar{x}_k))^2, \quad (18)$$

ahol  $\ell_n$  a MC minta mérete és  $\{\bar{x}_k\}$  i.i.d. egyenletes valószínűségi változók az  $\mathbb{X}$ -en. Ez az ötlet a NSzET-ből adódik miszerint a (18) egyenletben szereplő átlag tart  $\|f_{\theta,n}^{(i)} - f_\theta\|_2^2$ -hez (m.m.), ha  $\ell_n \rightarrow \infty$ . Meggondolható, hogy az egzakt konfidenciaszint megmarad, ha ezt a becslést használjuk a pontos integrálértékek helyett. A cikk végén szereplő tesztesetekben is ezt a közelítést alkalmaztuk.

Vegyük észre, hogy a kNN-módszer tekinthető egy lokálisan átlagoló kernel-módszernek, ahol minden ponthoz adaptáljuk az ablakfüggvény méretét és helyzetét. Ezért egy természetes általánosítása lenne Algoritmus I-nek, ha másik lokálisan átlagoló módszert választanánk a kNN helyett [6]. Noha a  $k(\cdot, \cdot)$  függvényt ismét kernelnek hívjuk, nem követeljük meg, hogy ez a függvény pozitív definit legyen. Általában  $k(x, y) = K(x - y)$ , ahol  $K$  nemnegatív és az origóból kiindulva minden sugár mentén monoton csökkenő. Ekkor adott kernel,  $k(\cdot, \cdot)$  – például Gauss – esetén az  $\{f_{\theta,n}^{(i)}\}$  becsléseket definiálhatjuk a következőképpen:

$$f_{\theta,n}^{(i)}(x) \doteq \frac{1}{\sum_{l=1}^n k(x, x_l)} \sum_{j=1}^n y_{i,j}(\theta) k(x, x_j). \quad (19)$$

Ezekkel a regressziós függvény becslésekkel is konstruálhatók konfidenciahalmazok a korábbihoz hasonló módon. Algoritmus I-nek a lokálisan átlagoló kernel-módszerekkel általánosított variánsai szintén egzakt konfidenciahalmazt építenek. Sőt, mivel a kernel becslések egy jelentős része univerzálisan erősen konzisztens, az algoritmusunk általában örökli ezt a tulajdonságot.

## 4.2. Algoritmus II (beágyazás alapú)

A második algoritmus alapötlete, hogy beágyazzuk az eredeti minta eloszlását és az alternatív minták eloszlását egy RKHS-be egy karakterisztikus kernel segítségével. Ha a generáló eloszlások különböznek az eredetitől, akkor másik elemhez lesznek rendelve, mint az eredeti minta eloszlása. Ezt az eltérést próbáljuk a tapasztalati eloszlások segítségével statisztikusan kimutatni.

Algoritmus II-höz legyen  $\mathbb{S} = \mathbb{X} \times \{+1, -1\}$  a mintatér és legyen  $\mathcal{H}$  egy  $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvényeket tartalmazó RKHS. Feltesszük, hogy

(C1) a  $\mathcal{H}$  reprodukáló magú Hilbert-tér *szeparábilis*,

(C2) a  $\mathcal{H}$ -hoz tartozó kernel mérhető, *korlátos* és *karakterisztikus*.

Ha  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$  akkor  $\mathbb{S} = \mathbb{R}^d \times \{+1, -1\}$  és használhatjuk például a Gauss vagy a Laplace kernelt, ui. ezek korlátosak és karakterisztikusak is [8].

Értelmezzük az alábbi beágyazásokat

$$h_*(\cdot) \doteq \mathbb{E}[k(\cdot, S_*)] \quad \text{és} \quad h_\theta(\cdot) \doteq \mathbb{E}[k(\cdot, S_\theta)], \quad (20)$$

ahol  $S_*$  és  $S_\theta$  véletlen elemek az  $\mathbb{S}$  térből.  $S_*$  eloszlása az eredeti mintánk keresztet ismeretlen eloszlása, és  $S_\theta$  eloszlását a bemenetek peremeloszlása és az  $f_\theta$  regressziós függvény határozzák meg (ld. [4]).

A kernel korlátos, ezért  $\mathbb{E}[\sqrt{k(S_\theta, S_\theta)}] < \infty$ , így  $\{h_\theta\}$  létezik és  $\mathcal{H}$ -beli [8]. A kernel karakterisztikus, tehát  $h_\theta = h_*$  pontosan akkor, ha  $\theta = \theta^*$ . Most legyen a beágyazott eloszlás tapasztalati változata a következő

$$h_{\theta,n}^{(i)}(\cdot) \doteq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n k(\cdot, s_{i,j}(\theta)), \quad (21)$$

minden  $i = 0, \dots, m-1$  esetén, ahol  $s_{i,j}(\theta) \doteq (x_j, y_{i,j}(\theta))$ ; emlékeztetőül  $y_{0,j}(\theta) = y_j$ . Más szóval minden  $i \neq 0$  esetén  $s_{i,j}(\theta)$  eloszlása megegyezik  $S_\theta$  eloszlásával, továbbá  $s_{0,j}$  eloszlása megegyezik  $S_*$  eloszlásával.

Most definiáljuk a  $\{Z_n^{(i)}(\theta)\}_{i=0}^{m-1}$  változókat a következőképpen:

$$Z_n^{(i)}(\theta) \doteq \sum_{j=0}^{m-1} \|h_{\theta,n}^{(i)} - h_{\theta,n}^{(j)}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (22)$$

azaz számoljuk ki  $h_{\theta,n}^{(i)}$  teljes kumulatív távolságát az összes többi beágyazott elemtől. Erre azért van szükség, mert általában nehéz a  $h_\theta(\cdot) = \mathbb{E}[k(\cdot, S_\theta)]$  függvényt explicite megadni és az ettől vett távolságot kiszámolni. Ezek után a  $\Theta_{\varrho,n}^{(2)}$  konfidenciahalmaz hasonlóan konstruálható meg, mint korábban, ld. (16).

**4.3. TÉTEL.** *Feltéve, hogy A0, A1, A2, C1 és C2 teljesül, az Algoritmus II által konstruált konfidenciahalmazokra fennáll, hogy*

$$\mathbb{P}(\theta^* \in \Theta_{\varrho,n}^{(2)}) = q/m, \quad (23)$$

minden természetes  $n$ -re és  $\varrho = (q, m)$ ,  $q \leq m$  segédparaméterpárra, valamint  $q < m$  és  $2 < m$  esetén a módszer erősen konzisztens.

Vegyük észre, hogy az algoritmus végrehajtható, hiszen a beágyazott elemek négyzetes távolsága a Hilbert-térben,  $\|h_{\theta,n}^{(i)} - h_{\theta,n}^{(j)}\|_{\mathcal{H}}^2$ , kifejezhető a reprodukáló tulajdonság és az  $s_{i,1}(\theta), \dots, s_{i,n}(\theta), s_{j,1}(\theta), \dots, s_{j,n}(\theta)$  minta Gram mátrixának segítségével, azonban a  $\{Z_n^{(i)}(\theta)\}$  változók kiszámolásához szükséges Gram mátrixok függenek a vizsgált  $\theta$  paramétertől, így ez a módszer nagy számításigénnyel rendelkezik és jelentősége inkább elméleti.

### 4.3. Algoritmus III (eltérés alapú)

Algoritmus III az előző algoritmus intuícióit követi, de ebben az esetben egy egyszerűbb alakban definiáljuk a  $\{Z_n^{(i)}(\theta)\}$  változókat, ami miatt a Gram mátrixot elég csak egyszer kiszámolni az algoritmus során, ennél fogva a számításigény ebben az esetben jelentősen alacsonyabb, mint korábban.

Algoritmus III-hoz feltesszük, hogy

- (D1)  $\mathbb{X}$  kompakt,
- (D2) minden  $f \in \mathcal{F}$  folytonos,
- (D3)  $\mathcal{H}$  egy mérhető, korlátos és univerzális kernellel ellátott szeparábilis RKHS, ami  $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  alakú függvényeket tartalmaz.

Legyen  $\varepsilon_{i,j}(\theta) \doteq y_{i,j}(\theta) - f_{\theta}(x_j)$ , minden  $i = 0, \dots, m-1$  és  $j = 1, \dots, n$  esetén. Vegyük észre, hogy ha  $i \neq 0$ , akkor  $\varepsilon_{i,j}(\theta)$  nulla várható értékű minden  $j$  esetén, mert  $f_{\theta}(x_j) = \mathbb{E}_{\theta}[y_{i,j}(\theta) | x_j]$ .

Ebben a részben legyenek definiálva a  $\{Z_n^{(i)}(\theta)\}$  változók az alábbi módon:

$$Z_n^{(i)}(\theta) \doteq \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{i,j}(\theta) k(\cdot, x_j) \right\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (24)$$

minden  $i = 0, \dots, m-1$  esetén. Látható, hogy  $Z_n^{(i)}(\theta)$  kiszámolható a  $K$  Gram mátrix,  $K_{i,j} \doteq k(x_i, x_j)$ , segítségével ugyanis a reprodukáló tulajdonság miatt

$$Z_n^{(i)}(\theta) = \frac{1}{n^2} \varepsilon_i^{\text{T}}(\theta) K \varepsilon_i(\theta), \quad (25)$$

használva az  $\varepsilon_i(\theta) \doteq (\varepsilon_{i,1}(\theta), \dots, \varepsilon_{i,n}(\theta))^{\text{T}}$  vektor jelölést.

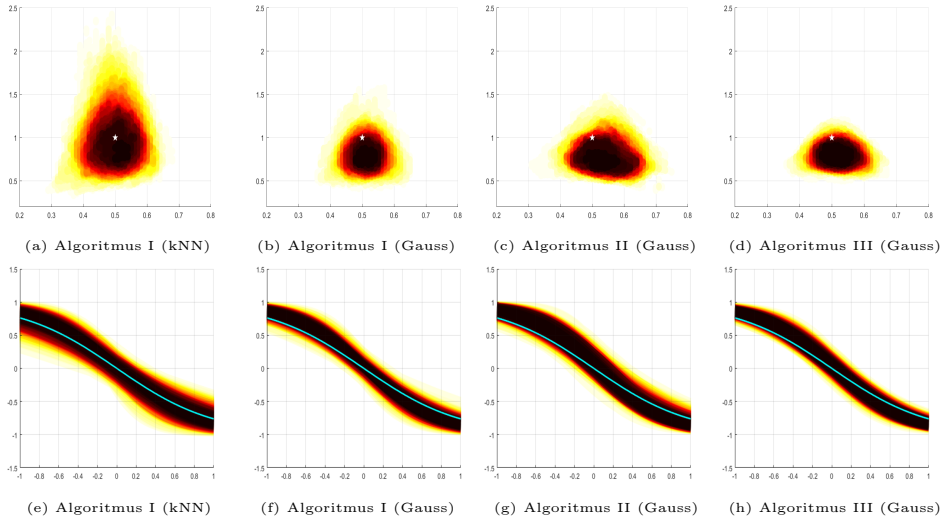
Innentől fogva követhetjük Algoritmus I konstrukcióját, azaz a rangsoroló függvényt úgy definiáljuk, mint (14)-ben és a konfidenciahalmaz megadható úgy, mint (16)-ben, de természetesen most az új  $\{Z_n^{(i)}(\theta)\}$  változókat használjuk.

**4.4. TÉTEL.** *Feltéve, hogy A0, A1, A2, D1, D2 és D3 teljesül, az Algoritmus III által konstruált konfidenciahalmazokra fennáll, hogy*

$$\mathbb{P}(\theta^* \in \Theta_{\varrho,n}^{(3)}) = q/m, \quad (26)$$

minden természetes  $n$ -re és  $\varrho = (q, m)$ ,  $q \leq m$  segédparaméterpárra; továbbá  $q < m$  esetén a módszer erősen konzisztens.





1. ábra. Egzak, nem-aszimptotikusan garantált konfidenciahalmaz családok a bevezetett algoritmusokhoz a paraméterterben (fenti ábrák: a, b, c, d) ill. a modellterben (lenti ábrák: e, f, g, h). A minta Laplace eloszlások keverékeként előállított szintitikus adatokat tartalmazott, a cél a keverési valószínűség ( $x$ -tengely) és a közös skálaparaméter ( $y$ -tengely) tartománybecslése volt. A színek a referencia elemek normalizált rangját – azaz az  $1/m \mathcal{R}_n(\theta)$  értékét – mutatják. Minél sötétebb egy pont színe, annál kisebb valószínűségű konfidenciahalmazokba is belekerül. A paraméterterben szereplő fehér csillag és a modellterben szereplő türkiz függvény az adatok generálására használt „igazi” paramétereket –  $p_* = 1/2$  ( $x$ -tengely) és  $\lambda_* = 1$  ( $y$ -tengely) – ill. regressziós függvényt jelöli.

## 5. Numerikus szimulációk

Az algoritmusok szemléltetése végett numerikus kísérleteket is végeztünk szintetikus és valós adatokon. Először, két Laplace eloszlás keverékeként előállított mintán mutatjuk be a módszerek működését, majd egy valós adatokon alapuló szívélegtelenség előrejelzési problémát vizsgálunk, melyeken a módszereinket összevetjük logisztikus regresszió alapuló aszimptotikus konfidenciahalmazokkal.

### 5.1. Kísérletek Laplace eloszlások keverékével

Az elsőként bemutatott kísérletek esetében a szintetikus minta együttes eloszlása két Laplace eloszlás keveréke, amelyek várható értéke,  $\mu_1$  és  $\mu_2$ , eltért egymástól, de a skálaparaméterük,  $\lambda$ , megegyezik. A szimuláció során természetesen tetszőleges eloszlásokat tekinthettünk volna; azért választottuk a vastagabb farkú Laplace eloszlást (pl., a normális helyett), hogy szemléltessük a módszereink általánosságát. Ebben a példában  $p$  valószínűséggel a „+1” osztályt,  $1 - p$  valószínűséggel a „−1” osztályt figyeltük meg, azaz a regressziós függvényekből álló modellcsaládot a  $p$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  és  $\lambda$  paraméterekkel adtuk meg.

A tesztesetekben a konfidenciahalmazokkal a  $p_* = 1/2$  ( $x$ -tengely) és  $\lambda_* = 1$  ( $y$ -

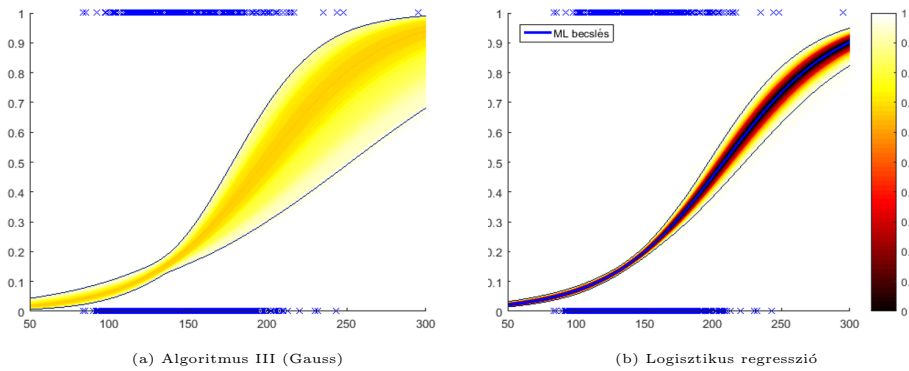
tengely) paramétereket szeretnénk volna becsülni. Az eltolásparamétereket ismertnek tekintettük,  $\mu_1 = -1$  és  $\mu_2 = 1$ , így két dimenziós ábrán tudtuk ábrázolni a halmazokat. Az 1. ábra mutatja a kapott relatív rangokat,  $\{\mathcal{R}_n(\theta)/m\}$ , a tesztelt  $\theta = (p, \lambda)$  paraméterek függvényében. A rangokat az (a), (c) és (d) esetben az Algoritmus I-II-III-al, a (b) esetben pedig az Algoritmus I kernelizált változatával számoltuk. Az (e), (f), (g) és (h) ábrák a modell térben szemléltetik a konfidencia-halmazokat. Az eredeti minta mérete  $n = 500$ , és további 39 újramintavételezett mintát használtunk, azaz  $m = 40$ . A kNN módszernél 15 szomszédal dolgoztunk. A kernel minden esetben a Gauss kernel  $\sigma = 1/8$  paraméterrel. Sötétebb színekkel jelöltük a kisebb rangokat, ezért a sötétebb színű paraméterek az alacsonyabb szintű konfidenciahalmazokba is bekerülnek. A rangokat a paraméterek egy sűrű rácsán értékeltük ki. A paraméterrácsot  $1/100$ -os lépésközzel alakítottuk ki a  $[0,2, 0,8] \times [0,2, 2,4]$ -os téglán. Látható, hogy a különböző algoritmusok összemérhető (korlátozott) konfidenciahalmazokat konstruálnak. A tapasztalatok szerint a konfidenciahalmazok mérete és a számításigény alapján a III. algoritmus alkalmazása a leghatékonyabb.

A bemutatott módszerek egy előnye, hogy nem szükséges, hogy a paramétereket interpretálni tudjuk azon túl, hogy valamilyen módon egy regressziós függvényt határoznak meg. Továbbá, a regressziós függvények kompatibilisek végtelen sok együttes eloszlással, ui. a bemenetek peremeloszlása nincs rájuk hatással. Emiatt nincs szükség arra, hogy az eloszlások együttesen is paraméterezve legyenek, ezért a módszereket szemi- vagy félpárametrikusnak is nevezhetjük. Ha  $\theta^* \in \mathbb{R}^d$  akkor a módszerek automatikusan *együttes* és továbbra is *egzak*t konfidenciahalmazokat építenek. Mindezek alapján a bemutatott algoritmusaink amellett, hogy erős elméleti garanciákkal rendelkeznek, nagyon rugalmasan alkalmazhatóak.

## 5.2. Szívélegtelenység előrejelzése sztochasztikus garanciákkal

Az Egészségügyi Világszervezet (WHO) felmérései szerint a szívélegtelenység tekinthető világszerte az első számú halálozási oknak. 2016-ban például a WHO becslése szerint 179 millióan haltak meg szívélegtelenység miatt. Az egyik leggyakoribb szívélegtelenység a koszorúér-betegség (CHD), aminek korai diagnosztizálása milliók életében csökkentheti a komplikációk kockázatát.

Második numerikus kísérletünkben egy Framinghamben (Massachusetts, USA) végzett kutatás adatain dolgoztunk, amely a Kaggle honlapon szabadon elérhető és felhasználható kutatási célokra [5]. Több, mint 4000 páciensnek 15 lehetséges kockázati faktora és az adatfelvételt követő 10 évben bekövetkező koszorúér-betegségei szerepeltek a vizsgált adathalmazban. A lehetséges kockázati tényezők között egészségügyi, demográfiai és viselkedési adatok voltak. A példa egyszerűsége kedvéért mi egyedül a szisztolés vérnyomás segítségével modelleztük a koszorúér-betegség bekövetkezési valószínűségét. A szisztolés vérnyomásra 85 és 295 Hgmm közötti értékek voltak felvéve. Viszonyítási alapként a WHO tájékoztatója szerint a 140 Hgmm feletti érték már magas vérnyomásnak tekintendő.



2. ábra. Kísérletek szívelégtelenség előrejelzésére. A mintaelemek – amelyeket a kék „x”-ek jelölnek – segítségével logisztikus modelleket, ld., (27), teszteltünk. Minden modell esetén a referencia elemek rangja a szín árnyalatával van jelölve, így a modellekhez tartozó elutasítási valószínűségek leolvashatók a színskála segítségével. A vékony sötétkék függvények grafikonjai egy (konzervatív) 95%-os konfidenciasáv határait mutatják. A vastagabb világoskék grafikon a logisztikus regressziós modellt ábrázolja.

A 2. ábrán az  $x$  tengelyen láthatók a szisztolés vérnyomás értékek és az  $y$  tengelyen 1-es érték jelöli, hogyha 10 éven belül koszorúér-betegséggel diagnosztizáltak valakit, illetve 0 érték jelöli az egészséges (nem diagnosztizált) eseteket. A regressziós függvényre egy logisztikus modellosztályt tekintettünk:

$$\mathcal{F} \doteq \left\{ f_{(a,b)}(x) = \frac{1}{1 + \exp(-(a \cdot x + b))} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad (27)$$

amin kétféle módszert alkalmaztunk. Először az eltérés alapú Algoritmus III-at használtuk, hogy konfidenciahalmazokat konstruáljunk. A logisztikus modellek megfelelő transzformáltjait teszteltük az algoritmus segítségével egy sűrű paraméterrácon. A transzformációra azért volt szükség, hogy a címkék értékeit egységsítsük: az eddig „–1”-gyel jelölt osztályt azonosítottuk a példában szereplő „0” értékű osztállyal. A tesztelt paraméterpárok a  $[-6, -4]$  intervallum  $1/80$ -os lépésközzel vett felosztásának osztópontjaiból és a  $[0,015, 0,035]$  intervallum  $2,5 \times 10^{-4}$ -es lépésközzel vett felosztásának osztópontjaiból álltak. Viszonyításképpen ábrázoltuk a maximum likelihood (ML) módszerrel meghatározott *logisztikus regressziós* modell körül a Fisher-információ segítségével megadott *határeloszlás* alapján kapott konfidenciahalmazokat [7]. A konfidencia-ellipszoidok határain a paraméterekhez tartozó modellek esetében színárnyalattal (diszkretizálva) ábrázoltuk az elutasítási valószínűségeket. A pontos valószínűségek a színskála segítségével olvashatók le mindkét módszer esetén. Az ábrákon sötétkék színnel feltüntettük a 95%-os konfidenciahalmazba eső függvények pontonkénti maximumát és minimumát. Belátható, hogy a pontos minimum és maximum értékek egy legalább 95%-os (konzervatív) konfidenciasávot határoznak meg a regressziós függvény értékeire. Fontos megjegyeznünk, hogy míg a mi módszerünk egzakt garanciát szolgáltat az „igazi”

paraméterre nézve, addig a logisztikus regresszió esetében a korlátok egy határel-oszláson alapulnak, amelyek paraméterei csak becslve vannak. Ezek a tényezők kisebb minta esetén jelentősen befolyásolhatják a kapott konfidenciahalmazok méretét. Vegyük észre továbbá, hogy a mi módszerünk egyedül a modellek alakját használja ki és azon az intervallumon, ahol kevesebb adatunk van, nagyobb bizonytalansággal becsli a betegség kockázatát. Ez statisztikai szempontból egy sokkal realisabb megközelítés, mint amit a „tankönyvi megoldás”, az ML becslés határel-oszlása szolgáltat.

## 6. Összefoglalás

A cikkben bemutattuk, miként konstruálhatunk *nem-aszimptotikus* konfidenciahalmazokat a *feltételes várható érték függvényhez* bináris osztályozás esetén tetszőleges megbízhatósági szintre, a minta eloszlásától függetlenül. A regressziós függvény vizsgálata kiemelten fontos a klasszifikáció szempontjából, mivel megadható vele az optimális Bayes osztályozó, és a félreklasszifikálás kockázata is. A cikkben szintetikus és valós adatokon keresztül szemléltettük a módszereinket.

Az alapötlet az volt, hogy úgy tesztelünk egy modelljelöltet, hogy a segítségével *alternatív mintákat* generálunk, és összehasonlítjuk egy adott kernel-módszer teljesítőképességét az eredeti mintán és a generált mintákon. Általában, ha egy modelljelölt „távol” van a keresett (ismeretlen) modelltől, akkor a generált minták nagy mértékben eltérnek az eredeti mintától, amit statisztikailag kimutathatunk a becsült modellek segítségével. A cikkben három konstrukciót vezettünk be. Mindegyikről megmutatható, hogy *egzakt* és *erősen konzisztens* konfidenciahalmazokat épít tetszőleges mintaméret esetén, gyenge statisztikai feltételek mellett.<sup>1</sup>

A konstrukció alapján egyenként minden paraméterről egyértelműen eldönthető, hogy kerül-e egy adott valószínűségű konfidenciahalmazba, de a teljes halmaz hatékony reprezentálása (például egy ellipszoiddal való külső közelítése) kihívást jelent. Alacsony dimenziós paraméterterben a halmaz jól közelíthető diszkretizációval, azonban a közelítés számításigénye a dimenzió növekedésével hatványozottan nő, ezért a reprezentálás skálázhatósága további kutatást igényel.

## 7. Köszönetnyilvánítás

A bemutatott eredmények az NKFIH támogatásával a Mesterséges Intelligencia Nemzeti Laboratórium és a 2018-1.2.1-NKP-2018-00008 projekt keretében készültek. A kutatásokat az ITM és az NKFIH által finanszírozott Kooperatív Doktori Program (KDP) 1007901 számú doktori hallgatói ösztöndíja is támogatta.

---

<sup>1</sup>A bizonyítások elérhetők a következő linken: <https://arxiv.org/abs/1903.09790>.

## Hivatkozások

- [1] ARONSZAJN, N.: *Theory of Reproducing Kernels*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. **68** No. **3** (1950), pp. 337-404 (1950). DOI: [10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7)
- [2] CARÈ, A., CSÁJI, B. CS., CAMPI, M., AND WEYER, E.: *Finite-Sample System Identification: An Overview and a New Correlation Method*, IEEE Control Systems Letters, Vol. **2** No. **1**, pp. 61-66 (2018). DOI: [10.1109/LCSYS.2017.2720969](https://doi.org/10.1109/LCSYS.2017.2720969)
- [3] CSÁJI, B. CS. AND TAMÁS, A.: *Semi-Parametric Uncertainty Bounds for Binary Classification*, in: *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* IEEE, Piscataway, NJ, pp. 4427-4432 (2019). DOI: [10.1109/CDC40024.2019.9029477](https://doi.org/10.1109/CDC40024.2019.9029477)
- [4] DEVROYE, L., GYÖRFI, L., AND LUGOSI, G.: *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*, Springer, Vol. **31** (1996). DOI: [10.1007/978-1-4612-0711-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0711-5)
- [5] DILEEP: *Logistic Regression to Predict Heart Disease*, accessed: 2020-11-01(2019). <https://www.kaggle.com/dileep070/heart-disease-prediction-using-logistic-regression/version/1>
- [6] GYÖRFI, L., KOHLER, M., KRZYŻAK, A., AND WALK, H.: *A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression*, Springer (2002). DOI: [10.1007/b97848](https://doi.org/10.1007/b97848)
- [7] LEHMANN, E. L. AND ROMANO, J. P.: *Testing Statistical Hypotheses*, Springer Science & Business Media (2006). DOI: [10.1007/0-387-27605-X](https://doi.org/10.1007/0-387-27605-X)
- [8] MUANDET, K., FUKUMIZU, K., SRIPERUMBUDUR, B., AND SCHÖLKOPF, B.: *Kernel Mean Embedding of Distributions: A Review and Beyond*, Foundations and Trends in Machine Learning, Vol. **10** No. **1-2**, pp. 1-141 (2017). DOI: [10.1561/22000000060](https://doi.org/10.1561/22000000060)
- [9] TAYLOR, R. L.: *Stochastic Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Linear Spaces*, vol. 672, Springer (1978). DOI: [10.1007/BFb0063205](https://doi.org/10.1007/BFb0063205)
- [10] VAPNIK, V. N.: *Statistical Learning Theory*, Wiley-Interscience (1998).



Tamás Ambrus 1996-ban született Esztergomban. Az alapképzést az Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE) matematika szakán végezte 2015 és 2018 között, majd ugyanitt 2020-ban alkalmazott matematikus MSc diplomát szerzett sztochasztika specializáción. 2020-tól kezdve az ELTE Matematika Doktori Iskolában PhD hallgató. 2018 óta a Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet (SZTAKI) Mérnöki és Üzleti Intelligencia Laboratóriumában (EMI) dolgozik. 2019-ben kernel alapú klasszifikációs algoritmusok bizonytalanságáról írt dolgozatával a tudományos diákkonferencián 1. díjat szerzett. Jelenleg a statisztikus tanuláselmélet témakörében végez kutatásokat.

Nem-aszimptotikus és eloszlás-független módszerek fejlesztésén dolgozik.

Tamás Ambrus

Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet (SZTAKI)  
1111 Budapest, Kende utca 13-17.  
tamas.ambrus@sztaki.hu



Csáji Balázs Csanád 1976-ban született Budapesten. Első diplomáját (MSc) programtervező matematikusként szerezte az ELTE-TTK-n 2001-ben, majd filozófia szakos bölcsész diplomát (MA) szerzett az ELTE-BTK-n 2006-ban. Tanulmányai alatt 3-5 hónapos részképzésekben vett részt az Eindhoveni Műszaki Egyetemen (Hollandia, 2001), a British Telecomnál (Nagy Britannia, 2002), és a Johannes Kepler Egyetemen (Ausztria, 2003). PhD fokozatát az ELTE Informatikai Karán védte meg 2008-ban. Doktorálása után a Louvaini Katolikus Egyetemen (Belgium) volt posztdoktori kutató, majd 2009-től a Melbournei Egyetemen (Ausztrália) dolgozott, ahonnan 2013-ban tért haza, jelenleg a SZTAKI tudományos főmunkatársa. Eredményeit több díjjal jutalmazták, például elnyerte az Ausztrál Kutatási Tanács (ARC) "Discovery Early Career Researcher Award (DECRA)" díját, valamint az MTA Matematikai Tudományok Osztályának Gyires Béla díját is. Több mint 70 referált tudományos cikk szerzője, kutatási területe a gépi tanulásban és rendszeridentifikációban fellépő sztochasztikus modellek valószínűségelméleti és statisztikai vizsgálata.noindent

Csáji Balázs Csanád

Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet (SZTAKI)  
1111 Budapest, Kende utca 13-17.  
csaji.balazs@sztaki.hu

## STOCHASTIC GUARANTEES FOR BINARY CLASSIFICATION

AMBRUS TAMÁS, BALÁZS CSANÁD CSÁJI

Binary classification is one of the fundamental problems of statistical learning theory. The paper aims at estimating, with strong non-asymptotic stochastic guarantees, the conditional expectation of the class labels given the inputs, i.e., the regression function. The regression function does not only determine a Bayes optimal classifier, which provides optimal predictions, but also gives access to the misclassification probability. We introduce a resampling framework to construct confidence regions for the regression function with exact coverage probabilities and present three kernel-based semi-parametric methods, all of which are strongly consistent.

**Keywords:** binary classification, regression function, confidence regions, distribution-free methods, non-asymptotic guarantees, strong consistency, exact confidence

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja  
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtítkára  
Szedte és tördelte: Moczár Károly

Nyomta a Coradix Kft., Budapest  
Felelős vezető: Szűcs Ernőné

Budapest, 2020  
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben  
100 példányban  
HU ISSN 0133-3399

# ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat és mellékleteiket egy tömörített zip fájlban e-mailen az [aml@renyi.hu](mailto:aml@renyi.hu) címre kérjük elküldeni.

A részletes instrukciók és a LaTeX minta fájl megtalálhatók az AML honlapján, a cikkek benyújtása [http://aml.math.bme.hu/?page\\_id=7](http://aml.math.bme.hu/?page_id=7) címén. Mivel az Alkalmazott Matematikai Lapokban megjelenő cikkek 2019 óta DOI azonosítót kapnak, az irodalomjegyzékben szereplő minden forrás adatai között szerepeltetni kell a DOI azonosítót is, amennyiben rendelkezik ilyen-  
nel.

Kérjük a szerzőket, hogy a cikk benyújtása előtt ellenőrizték az alábbi elemek meglétét:

## **A teljes cikk, benne:**

magyar nyelvű kivonat

a cikk szövege, valamint ábrák és táblázatok, ha vannak

irodalomjegyzék, DOI azonosítókkal együtt

szerzők bemutatása és fotói, munkahelyei és e-mail címei

angol nyelvű cím és kivonat

## **Mellékelt fájlok:**

a cikk LaTeX forráskódja, és a teljes cikk pdf formátumban

ábrák, képek fájljai

szerzők fotói

A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.



# TARTALOMJEGYZÉK

Előszó .....	103
Dr. Pap Gyula emlékére (1954-2019) .....	105
Szigeti Ferenc emlékére (1945-2019) .....	111
A QP Akadémiai Kiválóság Díj 2020. évi díjazottja: Röst Gergely .....	115
A Prékopa András-díj 2020. évi díjazottja: Szántai Tamás .....	119
Az Egerváry Jenő emléklakett 2019. évi díjazottja: Temesi József .....	123
Az Egerváry Jenő emléklakett 2020. évi díjazottja: Deák István .....	127
A Gyires Béla-díj 2020. évi díjazottja: Csomós Petra .....	131
A Farkas Gyula emlékdíj 2020. évi díjazottjai: Berend Gábor, Fekete Imre, Molontay Roland és Rigó Petra Renáta .....	139
Temesi József, Páros összehasonlítások a döntéshozatalban .....	147
Csató László, Sportbajnokságok tervezése: Tanulságok a férfi kézilabda Bajnokok Ligájából .....	157
Homolya Viktor, Vinkó Tamás, Befolyás terjedés optimumainak hálózatról .....	167
Bessenyei István, Technikai haladás a közepes fejlettség csapdjában .....	181
Berde Éva, Kuncz Izabella, Ha elmúlt ötvenöt éves, megmondja az életkorát? - Az Oszkár sofőrök viselkedésének modellezése .....	195
Gera Imre, London András, Gráf alapú dimenzióredukciós heurisztikák részvénytőkepiaci korrelációs mátrixokra .....	211
Pluhár András, Lineáris egyenletrendszerek konzisztenciájának kombinatorikai jelentései .....	225
Csóka Péter, Kondor Gábor, Csődszabályok pénzügyi hálózatokban .....	233
Szabó Balázs, Sebestyén Tamás, Egyensúlyi ár oligopolisztikus versenykörnyezetben, tökéletlen informáltság esetén .....	247
Gerencsér Balázs, Gerencsér László, Általánosított relatív konszenzus - éles konvergenciátételek .....	265
Darvay Zsolt, Rigó Petra Renáta, Szénási Eszter, Új keresési irányra épülő belsőpontos algoritmus lineáris optimalizálásra .....	277
Péterfalvi Ferenc, Recski András, Egy villamosságtani probléma, matroidelméleti megoldással és statikai következménnyel .....	287
Györfy Lajos, Párosítási stratégiák pozíciós játékokon .....	303
Szabó Sándor, Sztójkovics Dóra, Lineáris programok a maximális élsúlyú klikk problémára .....	317
Bertók Botond, Hibrid adatszerkezet halmazműveletek hatékony implementálásához .....	339
Tamás Ambrus, Csáji Balázs Csanád, Stochasztikus garanciák bináris klasszifikációhoz .....	365

# INDEX

Preface .....	103
In memoriam Dr. Gyula Pap (1954-2019) .....	105
In memoriam Ferenc Szigeti (1945-2019) .....	111
QP Academic Excellence Award recipient in 2020: Gergely Röst .....	115
András Prékopa Prize recipient in 2020: Tamás Szántai .....	119
Jenő Egerváry Prize recipient in 2019: József Temesi .....	123
Jenő Egerváry Prize recipient in 2020: István Deák .....	127
Béla Gyires Prize recipient in 2020: Petra Csomós .....	131
Gyula Farkas Prize recipients in 2020: Gábor Berend, Imre Fekete, Roland Molontay and Petra Renáta Rigó .....	139
József Temesi, Pairwise comparisons for decision making .....	147
László Csató, How to design hybrid tournaments: lessons from the men's handball Champions League .....	157
Viktor Homolya, Tamás Vinkó, On the optima networks of influence maximization .....	167
István Bessenyei, Technical progress in the middle-income growth trap .....	181
Éva Berde, Izabella Kuncz, Who are interested in revealing their age? .....	195
Imre Gera, András London, Graph-based dimension reduction heuristics to stock correlation matrices .....	211
András Pluhár, The combinatorial meaning of the consistency of systems of linear equations .....	225
Péter Csóka, Gábor Kondor, Bankruptcy rules in financial networks .....	233
Balázs Szabó, Tamás Sebestyén, Price equilibrium under oligopolistic circumstances in case of imperfect information .....	247
Balázs Gerencsér, László Gerencsér, Generalized ratio consensus - tight bounds on convergence rate .....	265
Zsolt Darvay, Petra Renáta Rigó, Eszter Szénási, Interior-point algorithm for linear optimization based on a new search direction .....	277
Ferenc Péterfalvi, András Recski, A problem in electric network theory, its solution via matroid theory and a corollary in statics .....	287
Lajos Györfy, Pairing strategies on positional games .....	303
Sándor Szabó, Dóra Sztójkovics, Linear programs for the edge weighted maximum clique problem .....	317
Botond Bertók, Hybrid data structure for efficient implementation of set operations .....	339
Ambrus Tamás, Balázs Csanád Csáji, Stochastic guarantees for binary classification .....	365